கணிதப்பாடத்தில் மெல்லகற்கும் மாணவர்களுக்கு எளியமுறையில் தேர்ச்சி பெற வினா-விடை கையேடு.

தொகுப்பாளர்கள் :

1. **திரு.ஆ.தண்டபாணி** முதுகலை கணித ஆசிரியர்.
   அரசு ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி.
   தேவபாண்டலம்.
2. **திரு.க.திருமுருகன்.** முதுகலை கணித ஆசிரியர்.
   அரசு ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி
   வழுதாவூர்

முக்கிய குறிப்புகள் :

1. +2 கணிதப்பாட வினா கட்டமைப்பின் படி ஒருமதிப்பெண் வினாக்களை பொருத்தவரை பாடபுத்தத்திற்கு பின் உள்ள வினாக்களில் எவ்வித மாற்றமும் இன்றி அதில் உள்ளவாறே கேட்கப்படுவதால் அவ்வினாக்களை திரும்ப திரும்ப பயிற்சி எடுத்துக் கொண்டால் 30 மதிப்பெண் எளிதில் பெறமுடியும்.
2. 100 சதவீதம் தேர்ச்சி பெறும் வகையில் இப்பயிற்சி கட்டகம் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது இக்கட்டகத்தை படித்து பயிற்சி எடுத்துக்கொண்டால் ஒவ்வொரு அத்தியாயத்திலும் கீழ்கண்டவாறு குறைந்தபட்ச மதிப்பெண்களை பெறமுடியும்.

வ.எண்	அத்தியாயம்	குறைந்தபட்ச மதிப்பெண்
1	அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்	06
2	வெக்டர் இயற்கணிதம்	18
3	கலப்பெண்கள்	06
4	பகுமுறை வடிவகணிதம்	20
5	வகைநுண் கணிதம் -II	16
6	வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்	10
7	தனிநிலைக் கணக்கியல்	22
8	ஒருமதிப்பெண் வினா	30
	மொத்தம்	128

3. தேர்வு நெருங்கும் போது அவசர அவசரமாக கணக்குகளை மனப்பாடம் செய்வதை தவிர்த்து ஆரம்பம் முதலே கணக்குகளை செய்து பார்க்க வேண்டும்.
4. தேர்வு எழுதும் போது எவ்வித குழப்பமும் இல்லாமல் எழுதுதல் அவசியம்.
5. தேவையான இடங்களில் படங்களை வரைய வேண்டும். படத்திற்கு மதிப்பெண் உண்டு.
6. ஒவ்வொரு வினா-விடைக்கும் தீர்வுகாண உதவும் சூத்திரங்களை அவசியம் எழுதவேண்டும்.
7. இக்கட்டகத்தில் உள்ள விடை குறிப்புகள் மிகவும் சுருக்கமாக உள்ளதால் மேலும் சுருக்காமல் எழுதவும்.
8. விடைகளை சரிபார்த்தலுக்கு வாய்ப்புள்ள வினாக்களை தேர்ந்தெடுத்து எழுதவும்.
9. கேள்வி எண்ணையும், கேள்வியில் உள்ள விபரங்களையும் இருமுறை சரிபார்க்க வேண்டும்.

1.அணிகளும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகளும்

6 மதிப்பெண் வினாக்கள்

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியைக்காண்க. $A\,(adjA) = (adjA)\,A = |A|\,I_2$ என்பதைச் சரிபார்

தீர்வு

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$adj\,A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -11$$

$$A\,(adj\,A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = -11I$$

$$(adj\,A)\,A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = -11I$$

எனவே $A\,(adj\,A) = (adj\,A)\,A = |A|\,I$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ எனில் $A\,(adjA) = (adjA)\,A = |A|\,I_2$ என்பதைச் சரிபார்

தீர்வு :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$adj\,A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2$$

$$A\,(adj\,A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$$

$$(adj\,A)\,A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$$

எனவே $A\,(adj\,A) = (adj\,A)\,A = |A|\,I$

3) $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ - இன் சேர்ப்பு அணி Aஎன நிறுவுக. (March – 2008, Mar 2011)

தீர்வு:

$$A_C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$adj\ A = A$$

4. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ எனில் $A = A^{-1}$ என்பதைச் சரிபார். $(March - 2009)$

தீர்வு **:** $AA = AA^{-1}$

$A^2 = I$ என நிறுவினால் போதும்.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க

தீர்வு **:**

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \\ 5 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-35)+5(-4+25)-1(14-5)$$

$$=-33+105-9$$

$$=63 \neq 0$$

$$\rho(A) = 3,$$

6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க

தீர்வு **:**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(-2)+2(2+3)$$

$$=2+10$$

$$=12 \neq 0$$

$$\rho(A) = 3$$

7) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க

தீர்வு :

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$

$\rho(A) \neq 3$

மேலும்

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

$\rho(A) = 2$

8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க

தீர்வு :

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -7 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -7 & 3 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -7 & 3 & 6 \end{vmatrix}=0$

$\rho(A) \neq 3$

மேலும்

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}= 6 \neq 0$

$\rho(A) = 2$

9) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க

தீர்வு :

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 7 & 6 & -1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$\rho(A) \neq 3$$

மேலும்

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

$$\rho(A) = 2$$

10) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க.

தீர்வு :

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\rho(A) \neq 3$$

மேலும்

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\rho(A) = 2$$

11) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\,3 \\ 2 & -1 & 3\,4 \\ 5 & -1 & 711 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க.

தீர்வு :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 7 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 11 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 11 & 5 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 11 & 5 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\rho(A) \neq 3$$

மேலும்

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$\rho(A) = 2$$

12) $\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{-3}\end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் காண்க

□ர்□:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & 4 & 6 & -2\\ 3 & 6 & 9 & -3\end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1\\ R_3 \to R_3 - 3R_1\end{matrix}$$

$$\rho(A) = 1.$$

13. □நர்ம□தி அ□ க□ணல் □□ற□ல் □ர்க்க: $\mathbf{2x - y = 7, 3x - 2y = 11}$

□ர்□: தரப்பட்ட சமன்ப□□க□ளப் பின்வ□ம□தி எ□தலா□ம்,

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\ 11\end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0$$

A□ச்சியமற்ற □க□□வ அ□ , என□வ A^{-1}க□ண □□ா ம்.

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$ என்ப□ □ர்வ□□ம்.

$$X = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14 - 11\\ 21 - 22\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$$

$$\therefore x = 3, y = -1$$

14. □நர்ம□தி அ□ க□ணல் □□ற□ல் □ர்க்க:

$$\mathbf{7x + 3y = -1, 2x + y = 0}$$

□ர்□:

தரப்பட்ட சமன்ப□□க□ளப் பின்வ□ம□தி எ□தலா□ம்,

$$\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 7 - 6 = 1 \neq 0$$

A□ச்சியமற்ற □க□□வ அ□ , என□வA^{-1}க□ண □□ா ம்.

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$ என்ப□ □ர்வ□□ம்.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0 \\ 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\therefore x = -1, y = 2$

15. $2x + 3y = 8, 4x + 6y = 16$ அசமப□த்த□ன □ந□யச் சமன்ப□ட்□த் □த□□ப்பி□ன அ□ க்□க□□வ □□ற□ல் □ர்க்க.

□ர்□:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 48 - 48 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 32 - 32 = 0$$

$\Delta = 0$ மற்றி ம் $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0$ என்பத□□ ம், Δ-இன் □□றந்த□ ஒ□ □க□ ஆவ□ □ச்சியமற்றி இ□ப்பத□ல், □த□□ப்□ ஒ□ங்க□ ம□ உ□டயத□□ம், எண்□ க்□கயற்ற □ர்□கள் □□டக்□ம். □த□□ப்□ ஒ□ர ஒ□ த□ ச்சமன்ப□ட்□ற்□ □□றா ம். □க□□க்கப்பட்ட □த□□ப்ப□ன□ $2x + 3y = 8$ ஆ□ம்.

$y = t, t \in R$ எனத் தர $2x = 8 - 3t \Rightarrow x = \frac{8-3t}{2}$

என□வ □ர்□ கணம□ன□ $(x, y) = \left(\frac{8-3t}{2}, t\right), t \in R$.

16. $2x + 2y + z = 5, x - y + z = 1, \quad 3x + y + z = 4$ அசமப□த்த□ன □ந□யச் சமன்ப□ட்□த் □த□□ப்பி□ன அ□ க்□க□□வ □□ற□ல் □ர்க்க.

□ர்□: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2-1) - 2(2-3) + 1(1+3)$

$= -6 + 2 + 4 = 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5(-2-1) - 2(2-4) + 1(1+4)$

$= -15 + 4 + 5 = -6 \neq 0$

$\Delta = 0$ மற்றி ம் $\Delta_x \neq 0 \Delta_x$, என்பத□ல். □த□□ப்□ ஒ□ங்க□ ம□ அற்ற□ அத□வ□ இதற்□ □ர்□ □□டய□□.

17. $x + y + 2z = 4, 2x + 2y + 4z = 8, 3x + 3y + 6z = 10$ அசமப□த்த□ன □ந□யச் சமன்ப□ட்□த் □த□□ப்பி□ன அ□ க்□க□□வ □□ற□ல் □ர்க்க.

□ர்□:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0; \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \\ 10 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 0; \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

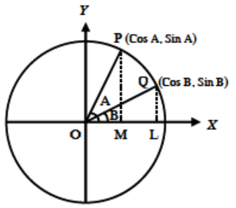
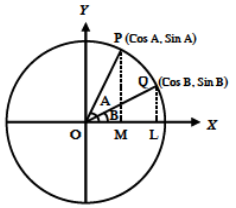
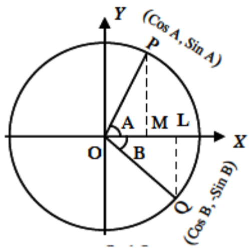
$\Delta = 0$ மற்றி ம் $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ □ம□ ம் Δ-ன் எல்ல□ 2×2 சிற்ற□ க்□க□□வககி ன் ம□ப்□கள் □ச்சியம□வத□□ ம்.ஆனால் Δ_X சில் ஒரு சிற்றணிக்கோவை பூச்சியமற்றதாயுள்ளதால் □த□□ப்□ ஒ□ங்க□ ம□அற்ற□. என□வ அதற்□ □ர்□ □□டய□□.

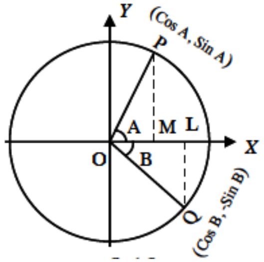
2.வெக்டர்இயற்கணிதம்

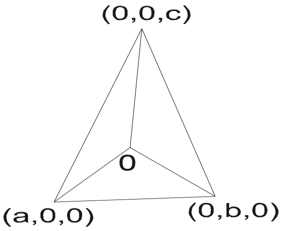
10 மதிப்பெண்வினாக்கள்

தீர்வு	தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு	கார்டீசியன் அமைப்பு
ஒரு புள்ளி இரண்டு கோடுகள்	$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v}$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$
(1,3,2) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{3}$ மற்றும் $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$என்ற கோடுகளுக்கு இணையான	$\vec{a}=\vec{i}+\overrightarrow{3j}+\overrightarrow{2k},\vec{u}=\overrightarrow{2i}-\vec{j}+3\vec{k}$ $\vec{v}=\vec{i}+\overrightarrow{2j}+\overrightarrow{2k}$ $\vec{r}=(\vec{i}+\overrightarrow{3j}+\overrightarrow{2k})+s(\overrightarrow{2i}-\vec{j}+3\vec{k})+t(\vec{i}+\overrightarrow{2j}+\overrightarrow{2k})$	$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$ $8x+y-5z-1=0$
$(2,-1,-3)$என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-4}$ மற்றும் $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{2}$என்ற கோடுகளுக்கு இணையான	$\vec{a}=\overrightarrow{2i}-\vec{j}-\overrightarrow{3k},\vec{u}=\overrightarrow{3i}+\overrightarrow{2j}-4\vec{k}$ $\vec{v}=\overrightarrow{2i}-\overrightarrow{3j}+\overrightarrow{2k}$ $\vec{r}=\overrightarrow{2i}-\vec{j}-\overrightarrow{3k}+s(\overrightarrow{3i}+\overrightarrow{2j}-4\vec{k})+t(\overrightarrow{2i}-\overrightarrow{3j}+\overrightarrow{2k})$	$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0$ $8x+14y+13z+37=0$
$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{3}$ என்ற கோட்டை உள்ளடக்கியதும் $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையானது	$\vec{a}=\overrightarrow{2i}+2\vec{j}+\vec{k},\vec{u}=\overrightarrow{2i}+\overrightarrow{3j}+3\vec{k}$ $\vec{v}=\overrightarrow{3i}-\overrightarrow{2j}+\vec{k}$ $\vec{r}=(\overrightarrow{2i}+2\vec{j}+\vec{k})+s(\overrightarrow{2i}+\overrightarrow{3j}+3\vec{k})+t(\overrightarrow{2i}-\overrightarrow{3j}+\overrightarrow{2k})$	$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$ $3x-7y+5z+3=0$
$(-1,3,2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $x+2y+2z=5$ மற்றும் $3x+y+2z=8$ ஆகிய தளங்களுக்கு செங்குத்தானதுமான	$\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k},\vec{u}=\vec{i}+\overrightarrow{2j}+2\vec{k}$ $\vec{v}=\overrightarrow{3i}+\vec{j}+\overrightarrow{2k}$ $\vec{r}=(\overrightarrow{-i}+3\vec{j}+2\vec{k})+s(\vec{i}+\overrightarrow{2j}+2\vec{k})+t(\overrightarrow{3i}+\vec{j}+\overrightarrow{2k})$	$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$ $2x+4y-5z=0$
தீர்வு	தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு	கார்டீசியன் அமைப்பு

இரண்டு புள்ளிகள், ஒரு கோடு	$\vec{r} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{v}$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$
$(-1,1,1)$மற்றும் $(1,-1,1)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழியே செல்லக்கூடியதும் $x+2y+2z$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தான	$\vec{a} = \overrightarrow{-i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \overrightarrow{2k}$ $\vec{r} = (1-s)(\overrightarrow{-i} + \vec{j} + \vec{k}) + s(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ $+ t(\vec{i} + 2\vec{j} + \overrightarrow{2k})$	$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $2x + 2y - 3z + 3 = 0$
$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-2}$ என்ற கோட்டை உள்ளடக்கியதும் $(1,1,-1)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லக் கூடியதும்	$\vec{a} = \overrightarrow{-i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = \overrightarrow{2i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{v} = \overrightarrow{2i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ $\vec{r} = (1-s)(\overrightarrow{-i} + \vec{j} - \vec{k})$ $+ s(\overrightarrow{2i} + 2\vec{j} + \vec{k}) + t(\overrightarrow{2i}$ $+ 3\vec{j} - 2\vec{k})$	$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$ $8x - 10y - 7z + 11 = 0$
$A(1,-2,3)$ மற்றும் $B(-1,2,-1)$ என்ற புள்ளிகள் $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான	$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = \overrightarrow{-i} + \overrightarrow{2j} - \vec{k}$ $\vec{v} = \overrightarrow{2i} + 3\vec{j} + \overrightarrow{4k}$ $\vec{r} = (1-s)(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k})$ $+ s(\overrightarrow{-i} + \overrightarrow{2j} - \vec{k})$ $+ t(\overrightarrow{2i} + 3\vec{j} + \overrightarrow{4k})$	$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-3 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ $2x - z + 1 = 0$
$(1,2,3)$மற்றும் $(2,3,1)$ என்ற புள்ளிகள் $3x - 2y + 4z - 5 = 0$ என்ற தளத்திற்கு செங்குத்தான	$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = \overrightarrow{2i} + \overrightarrow{3j} + \vec{k}$ $\vec{v} = \overrightarrow{3i} - 2\vec{j} + \overrightarrow{4k}$ $\vec{r} = (1-s)(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$ $+ s(\overrightarrow{2i} + \overrightarrow{3j} + \vec{k}) + t(\overrightarrow{3i}$ $- 2\vec{j} + \overrightarrow{4k})$	$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ $2x + z - 7 = 0$

<table>
<tr><th>நிரூபிக்கவேண்டியவை</th><th>படம்</th><th>$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$</th><th>வரையறையின்படி</th><th>படத்தின்படி</th></tr>
<tr>
<td>$Cos(A-B) = Cos\ A\ CosB + SinA\ SinB$</td>
<td>
</td>
<td>$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$
$= Cos\ A\vec{\imath} + Sin\ A\vec{\jmath}$
$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LQ}$
$= Cos\ B\vec{\imath} + Sin\ B\vec{\jmath}$</td>
<td>$\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{OP}|\ Cos(A-B)$
$= 1.1\ Cos(A-B)$
$= Cos(A-B)$</td>
<td>$\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OP} = (Cos\ A\vec{\imath} + Sin\ A\vec{\jmath}).(Cos\ B + Sin\ B\vec{\jmath})$
$Cos\ A\ CosB + Sin\ A\ Sin\ B$</td>
</tr>
<tr>
<td>$Sin(A-B) = SinA\ CosB - CosA\ SinB$</td>
<td>
</td>
<td>$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$
$= Cos\ A\vec{\imath} + Sin\ A\vec{\jmath}$
$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LQ}$
$= Cos\ B\vec{\imath} + Sin\ B\vec{\jmath}$</td>
<td>$\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OQ}| \times |\overrightarrow{OP}|\ Sin(A - B)\vec{k}$
$= Sin(A-B)\vec{k}$</td>
<td>$\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ CosB & SinB & 0 \\ CosA & SinA & 0 \end{vmatrix}$
$= \vec{k}(CosB\ SinA - SinB\ CosA)$
$= \vec{k}(SinA\ CosB - CosA\ SinB)$</td>
</tr>
<tr>
<td>$Cos(A+B) = Cos\ A\ CosB - SinA\ SinB$</td>
<td>
</td>
<td>$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$
$= Cos\ A\vec{\imath} + Sin\ A\vec{\jmath}$
$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LQ}$
$= Cos\ B\vec{\imath} - Sin\ B\vec{\jmath}$</td>
<td>$\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{OP}|\ Cos(A+B)$
$= 1.1\ Cos(A+B)$
$= Cos(A+B)$</td>
<td>$\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OP} = (Cos\ A\vec{\imath} + Sin\ A\vec{\jmath}).(Cos\ B - Sin\ B\vec{\jmath})$
$Cos\ A\ CosB - Sin\ A\ Sin\ B$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>$Sin(A+B) = SinA\ CosB$
$+ CosA\ SinB$</td>
<td>
</td>
<td>$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$
$= Cos\ A\vec{i} + Sin\ A\vec{j}$
$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LQ}$
$= Cos\ B\vec{i} - Sin\ B\vec{j}$</td>
<td>$\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = \left|\overrightarrow{OQ}\right| \times \left|\overrightarrow{OP}\right| Sin(A$
$+ B)\vec{k}$
$= Sin(A+B)\vec{k}$</td>
<td>$\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ CosB & -SinB & 0 \\ CosA & SinA & 0 \end{vmatrix}$
$= \vec{k}(CosB\ SinA + SinB\ CosA)$
$= \vec{k}(SinA\ CosB + CosA\ SinB)$</td>
</tr>
</table>

தீர்வு	தளத்தின்வெக்டர்சமன்பாடு	கார்டீசியன்அமைப்
மூன்றுபுள்ளிகள்	$\vec{r} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z- \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2- \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3- \end{vmatrix}$ $= 0$
$(2,2,-1),(3,4,2)$மற்றும் $(7,0,6)$ ஆகியபுள்ளிகள்	$\vec{a} = \overrightarrow{2i} + \overrightarrow{2j} - \vec{k}, \vec{b} = \overrightarrow{3i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ $\vec{c} = \overrightarrow{7i} + 6\vec{k}$ $\vec{r} = (1-s-t)(\overrightarrow{2i} + \overrightarrow{2j} - \vec{k}) + s(\overrightarrow{3i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}) + t(\overrightarrow{7i} + \overrightarrow{6k})$	$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix}$ $5x + 2y - 3z = 17$
$\overrightarrow{3i} + \overrightarrow{4j} + \overrightarrow{2k},\ \overrightarrow{2i} - \overrightarrow{2j} - \vec{k}, \overrightarrow{7i} + \vec{k}$	$\vec{r} = (1-s-t)(\overrightarrow{3i} + \overrightarrow{4j} + \overrightarrow{2k}) + s(\overrightarrow{2i} - \overrightarrow{2j} - \vec{k}) + t(\overrightarrow{7i} + \vec{k})$	$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-2 \\ -1 & -6 & -3 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ $6x + 13y - 28z - 14 =$
வெட்டுத்துண்டுவடிவில்ஒருதளத்தின்சமன்பாடு 	$\vec{r} = (1-s-t)a\vec{i} + sb\vec{j} + tc\vec{k}$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$	$(x_1, y_1, z_1) = (a, 0, 0)$ $(x_2, y_2, z_2) = (0, b, 0)$ $(x_3, y_3, z_3) = (0, 0, c)$ $\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

1. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \overrightarrow{2i} + \vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{d} = \vec{i} + \vec{j} + \overrightarrow{2k}$எனில்$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$என்பதனைசரிபார்க்க.

தீர்வு:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \overrightarrow{2k}$$

$$(\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - \overrightarrow{3j} + \vec{k}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{-5i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{d}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d} = -5\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

எனவே$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}$

2. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$மற்றும்$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-z-1}{1}$என்றகோடுகள்வெட்டிக்கொள்ளும்எனக்காட்டுக. மேலும்அவைவெட்டும்புள்ளியைக்காண்க.

தீர்வு: $\overrightarrow{a_1} = (1,-1,0)\overrightarrow{a_2} = (2,1,-1), \vec{u} = (1,-1,3), \vec{v} = (1,2,-1)$

கோடுகள்வெட்டிக்கொள்ளவேண்டியநிபந்தனை $=[(\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1})\vec{u}\vec{v}] = 0$

$$[(\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1})\vec{u}\vec{v}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

மேலும்$\vec{u}$, $\vec{v}$இணையற்றவைஎனவேகோடுகள்வெட்டிக்கொள்ளும்$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3} = \lambda$என்றகோட்டில்உள்ளஏதேனும்ஒருபுள்ளியின்அமைப்பு$(\lambda+1, -\lambda-1, 3\lambda)$ஆகும்.$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-z-1}{1} = \mu$என்றகோட்டில்உள்ளஏதேனும்ஒருபுள்ளியின்$(\mu+2, 2\mu+1, -\mu-1)$

கோடுகள்வெட்டிக்கொள்ளும்$(\lambda+1, -\lambda-1, 3\lambda) = (\mu+2, 2\mu+1, -\mu-1)$

$$\lambda + 1 = \mu + 2$$
$$-\lambda - 1 = 2\mu + 1 \text{தீர்க்க} \lambda = 0$$

வெட்டும்புள்ளி$(1,-1,0)$ஆகும்.

3. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$மற்றும்$\frac{x-4}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$என்றகோடுகள்வெட்டிக்கொள்ளும்எனக்காட்டுக. மேலும்அவைவெட்டும்புள்ளியைக்காண்க.

தீர்வு: $\overrightarrow{a_1} = (1,1,-1)\overrightarrow{a_2} = (4,0,-1), \vec{u} = (3\vec{i} - \vec{j}), \vec{v} = (2\vec{i} + \overrightarrow{3k})$

கோடுகள்வெட்டிக்கொள்ளவேண்டியநிபந்தனை $=[(\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1})\vec{u}\vec{v}] = 0$

$$[(\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1})\vec{u}\vec{v}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

மேலும்$\vec{u}$, $\vec{v}$இணையற்றவைஎனவேகோடுகள்வெட்டிக்கொள்ளும்.$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{0}=\lambda$ என்றகோட்டில்உள்ளஏதேனும்ஒருபுள்ளியின்அமைப்பு$(3\lambda+1,-\lambda+1,-\lambda)$ஆகும்.$\frac{x-4}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}=\mu$என்றகோட்டில்உள்ளஏதேனும்ஒருபுள்ளியின்அமைப்பு$(2\mu+4,0,3\mu-1)$

$$(3\lambda+1,-\lambda+1,-\lambda)=(2\mu+4,0,3\mu-1)$$

$-\lambda+1=0$ மற்றும்$3\mu-1=-1$

$\lambda=1$ மற்றும்$\mu=0$

வெட்டும்புள்ளி$(4,0,-1)$ஆகும்.

4. $\vec{a}=\overrightarrow{2i}+\overrightarrow{3j}-\vec{k},\vec{b}=-\overrightarrow{2i}+\overrightarrow{5k},\vec{c}=\vec{j}-\overrightarrow{3k}$ ஏனில் $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ என்பதனை சரிபார்க்க.

தீர்வு:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=-\overrightarrow{5i}-\overrightarrow{6j}-\overrightarrow{2k}$$

$$\overrightarrow{aX}(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ -5 & -6 & -2\end{vmatrix}$$

$=-\overrightarrow{12i}+\overrightarrow{9j}+\overrightarrow{3k}$ (1)

$(\vec{a}.\vec{c})=6$

$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}=-\overrightarrow{12i}+\overrightarrow{30k}$

$(\vec{a}.\vec{b})=-9$

$(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}=-\overrightarrow{9j}+\overrightarrow{27k}$

$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}=-\overrightarrow{12i}+\overrightarrow{9j}+\overrightarrow{3k}$ (2)

From (1) and (2)

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

5. ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக

$AD\perp BC\Rightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}=0$

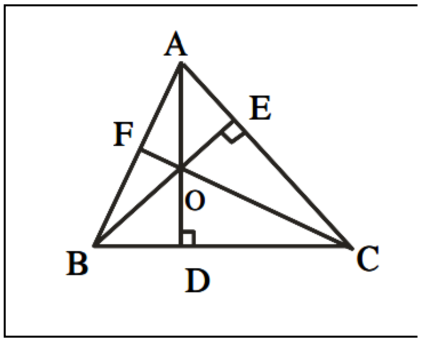
$\vec{a}.(\vec{c}-\vec{b})=0$

$\vec{a}.\vec{c}-\vec{a}.\vec{b}=0$ (1)

$BE\perp CA\Rightarrow\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{CA}=0$

$\vec{b}.(\vec{a}-\vec{c})=0$

$\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{c}=0$ (2)



(1) + (2)

$\vec{a}.\vec{c}-\vec{b}.\vec{c}$=0

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{OC}=0$

$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$

ஏனவே மூன்று குத்துக் கோடுகளும் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் கோடுகளாகும்.

3.கலப்பெண்கள்

6 மதிப்பெண்வினாக்கள்

1. $-8-6i$. இன் வர்க்க மூலம் காண்க $-2009, (March Sep. - 2006)$

தீர்வு: $-8-6i = 1-9-6i$

$$= 1+(3i)^2-6i$$
$$= (1-3i)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{-8-6i} = \pm(1-3i)$$
$$= 1-3i, -1+3i.$$

2. $-7+24i$ – இன் வர்க்க மூலம் காண்க($March - 2007, June - 2009$)

தீர்வு : $-7+24i = 9-16+24i$

$$= 3^2+24i+(4i)^2$$
$$= (3+4i)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{-7+24i} = \pm(3+4i)$$
$$= 3+4i, -3-4i.$$

3. n - என்பதுமிகைமுழுஎனில் $(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$ எனநிறுவுக

தீர்வு:

$$1+i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$\Rightarrow r = 2 \text{ and } \theta = \frac{\pi}{3}$$
$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$(1+i\sqrt{3})^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) \text{.............. (1)}$$
$$(1-i\sqrt{3})^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right) \text{.............. (2)}$$

(1) +(2)

$$(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$$

4. n - என்பதுமிகைமுழுஎனில்

$(\sqrt{3}+i)^n + (\sqrt{3}-i)^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{6}$ எனநிறுவுக

தீர்வு: $\sqrt{3}+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\Rightarrow r = 2 \text{ and } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$\sqrt{3}+i = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\left(\sqrt{3}+i\right)^n = 2^n\left(cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.............. (1)

$\left(\sqrt{3}-i\right)^n = 2^n\left(cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.............. (2)

(1) +(2)$\left(\sqrt{3}+i\right)^n + \left(\sqrt{3}-i\right)^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{6}$

5. n - என்பதுமிகைமுழுஎனில்$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}}cos\ n\pi/4$. எனநிறுவுக

தீர்வு:

$1+i = r(\cos\theta + i\,sin\theta)$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2}\ and\ \theta = \frac{\pi}{4}$$

$1+i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.............. (1)

$(1-i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.............. (2)

(1) +(2)

(2) $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}}cos\ n\pi/4$

7. கலப்பெண்கள் 7 + 9i, −3 + 7 i, 3 + 3 i எனும் கலப்பெண்கள்ஆர்கன் தளத்தில்ஒருசெங்கோணமுக்கோணத்தைஅமைக்குமஎனநிறுவுக.
$(June - 2009, March - 2010)$

தீர்வு:

A $(7, 9)$, $B(-3, 7)$ மற்றும் $C(3, 3)$

$$AB = |(7 + 9i) - (-3 + 7i)|$$
$$= |10 + 2i|$$
$$= \sqrt{100+4} = \sqrt{104}.$$
$$BC = |(-3 + 7i) - (3 + 3i)|$$
$$= |-6 + 4i|$$
$$= \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$
$$CA = |(3 + 3i) - (7 + 9i)$$
$$= |-4 - 6i|$$
$$= \sqrt{16+36}$$
$$= \sqrt{52}.$$
$$BC^2 + CA^2 = 52 + 52$$
$$= 104 = AB^2$$
$$\Rightarrow \angle C = 90.$$

8) $3+3i, -3-3i, -3\sqrt{3}+3\sqrt{3}i$ எனும் கலப்பெண்கள்ஒரு சமபக்க முகக்கோணத்தை ஆர்கன் தளத்தில் உருவாக்கும் என்றுகாட்டுக.

தீர்வு $A(3+3i)$, $B(-3-3i)$, $C(-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}i)$

$$AB = |(3+3i)-(-3-3i)| = |6+6i| = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}.$$

$$BC = |(-3-3i)-(-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}i)| = \sqrt{72}$$

$$CA = |(-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}i))-(3+3i)| = \sqrt{72}.$$

AB=BC=CA=$\sqrt{72}$கலப்பெண்கள்ஒருசமபக்கமுகக்கோணத்தை ஆர்கன் தளத்தில் உருவாக்கும்.

9) $3+i$ஐ ஒரு தீர்வாகக் கொண்ட $x^4-8x^3+24x^2-32x+20=0$எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$3+i$ ஒருதீர்வு

$3-i$ மற்றொரு மூலம்

மூலம்ங்களின் கூடுதல் $= 6$.

மூலம்ங்களின்பெருக்கம் $= 9+1 = 10$.

$x^2-6x+10$ எனபது ஓர் காரணியாகிது

$\therefore x^4-8x^3+24x^2-32x+20 \equiv (x^2-6x+10)(x^2+px+2)$

x^3கெழுவை ஒப்பிட $p-6=-8$

$\Rightarrow p=-2$.

x^2-2x+2.மற்றொரு காணியாகிறது

தீர்க்க $x = 1 \pm i$

எனவேமூலம்ங்கள் $3 \pm i$, $1 \pm i$.

10) $1+2i$ஐ ஒரு தீர்வாகக் கொண்ட $x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0$எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$1+2i$ஒருதீர்வு

$1-2i$மற்றொரு மூலம்

மூலங்களின் கூடுதல் $= 2$.

மூலங்களின்பெருக்கம் $= 1+4 = 5$.

x^2-2x+5 என்பது ஓர் காரணியாகிது

$\therefore x^4-4x^3+11x^2-14x+10 \equiv (x^2-2x+5)(x^2+px+2)$

x^3கெழுவை ஒப்பிட $p - 2 = -4 \Rightarrow p = -2.$

$x^2 - 2x + 2$.மற்றொரு காரணியாகிறது

தீர்வு $x = 1 \pm i$

எனவேமூலங்கள் $1 \pm 2i,\ 1 \pm i$.

11) $2 - i$ஐ ஒரு தீர்வாகக் கொண்ட $6x^4 - 25x^3 + 32x^2 - 3x - 10 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க.

தீர்வு : $2 + i$ ஒருதீர்வு

$2 - i$ மற்றொரு மூலம்

மூலங்களின் கூடுதல் $= 4$

மூலங்களின்பெருக்கம் $= 4 + 1 = 5$

$x^2 - 4x + 5$ என்பது ஓர் காரணியாகிது

$\therefore 6x^4 - 25x^3 + 32x^2 - 3x - 10 \equiv (x^2 - 4x + 5)(6x^2 + px - 2)$

x^3கெழுவை ஒப்பிட $p - 24 = -25$

$\Rightarrow p = -1.$

$6x^2 - x - 2$.மற்றொரு காரணியாகிறது

தீர்க்க $x = -2,\ \frac{2}{3}$

எனவேமூலங்கள் $2 \pm i,\ -2,\ 2/3$.

16) $(a_1 + i b_1)(a_2 + i b_2)(a_3 + i b_3)\ ..\ (a_n + i b_n) = A + i B$,எனில் நிறுவுக.

(i) $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)\ ...\ (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$.

(ii) $\tan^{-1}\frac{b_1}{a_1} + \tan^{-1}\frac{b_2}{a_2} + \tan^{-1}\frac{b_3}{a_3} + ... + \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} = k\pi + \tan^{-1}\frac{B}{A}$,

$k \in Z$.

தீர்வு :

(i) Given

$$(a_1 + i b_1)(a_2 + i b_2)(a_3 + i b_3)\ ...\ (a_n + i b_n) = A + i B,$$

$$|(a_1 + i b_1)(a_2 + i b_2)(a_3 + i b_3)\ ...\ (a_n + i b_n)| = |A + iB|,$$

$$|(a_1 + i b_1)||(a_2 + i b_2)||(a_3 + i b_3)|\ ...\ |(a_n + i b_n)| = |A + iB|$$

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\sqrt{a_3^2 + b_3^2}\ ...\ \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

வர்க்கப்படுத்த $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2) \;..\; (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2$.

(ii) $\quad arg\ \{(a_1 + i\,b_1)(a_2 + i\,b_2)(a_3 + i\,b_3)\ ...\ (a_n + i\,b_n)\}$

$$= arg\ (A + i\,B).$$

$$arg\,(a_1 + ib_1) + arg\,(a_2 + ib_2) + arg\,(a_3 + ib_3) + \,..+ arg\,(a_n + ib_n)$$

$$= arg\,(A + iB)$$

பொதுவாக

$$\tan^{-1}\frac{b_1}{a_1} + \tan^{-1}\frac{b_2}{a_2} + \tan^{-1}\frac{b_3}{a_3} + ... + \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} = k\pi + \tan^{-1}\frac{B}{A}, \qquad k \in Z.$$

13) $x = \cos\alpha + i\sin\alpha \; and \; y = \cos\beta + i\sin\beta$, எனில் $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\alpha + n\beta)$ என *நிரூபி.*

தீர்வு :

$$x^m y^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^m (\cos\beta + i\sin\beta)^n$$

$$= (\cos m\alpha + i\sin m\alpha)(\cos n\beta + i\sin n\beta)$$

$$= \cos(m\alpha + n\beta) + i\sin(m\alpha + n\beta)$$

$$\frac{1}{x^m y^n} = \cos(m\alpha + n\beta) - i\sin(m\alpha + n\beta)$$

$$\therefore\ x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = 2\cos(m\alpha + n\beta)$$

14. $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$ **எனில்(i)** $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$ **(ii)** $x^n - \frac{1}{x^n} = 2\,i\sin n\theta$ **;** $n \in N$ **எனநிரூபி.**

தீர்வு :

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow x = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$x^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$= \cos n\theta + i\sin n\theta \text{----------(1)}$$

$$\frac{1}{x^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta \text{-----------}(2)$$

(1)+(2)

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$$

(1)- (2)

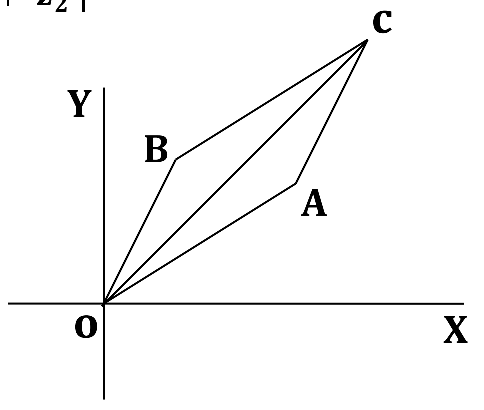
$$x^n - \frac{1}{x^n} = 2\, i\sin\, n\theta$$

15) முக்கோணச் சமனிலியை எழுதி நிறுவுக.
இருகலப்பெண்களின் கூடுதலின் மட்டுஅவ்விருஎண்களின் மட்டுகளின் கூடுதலுக்குக் குறைவாகவோஅல்லது
சமமாகவோ இருக்கும் அதாவது $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

தீர்வு :
ஆர்கன் தளத்தில் z_1 மற்றும் z_2என்ற இரு கலப்பெண்களைA மற்றும் Bபுள்ளிகளால் குறிக்க.
OACBஎன்ற இணைகரத்தைநிறைவுசெய்க. இங்குCஎன்பது$z_1 + z_2$ என்ற கலப்பெண்ணை குறிக்கிறது

$OA = |z_1|$, $OB = |z_2|$. மற்றும் $OC = |z_1 + z_2|$

ΔOACயிலிருந்து



$OC < OA + OB$

$$|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2| --- (1)$$

மேலும் புள்ளிகள் ஒருகோடமைவனஎனில்

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \quad --- (2)$$

$(1), (2)$ இலிருந்து $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

16. Z_1, Z_2 என்றஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு

(i) $|Z_1 Z_2| = |Z_1||Z_2|$

(ii) $\arg(Z_1 Z_2) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2)$ எனநிருபி.

$Z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \Longrightarrow \quad |Z_1| = r_1 \arg(Z_1) = \theta_1$

$Z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \Longrightarrow \quad |Z_2| = r_2 \arg(Z_2) = \theta_2$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}$$
$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

(i) $|z_1 z_2| = r_1 r_2$

$= |z_1||z_2|$

(ii) arg $(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$

$= \arg(Z_1) + \arg(Z_2)$

17 . Z_1, Z_2 என்றஏதேனும் இரு கலப்பெண்களுக்கு

(i) $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$ (ii) $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2)$ எனநிருபி

$Z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \Rightarrow \quad |Z_1| = r_1 \arg(Z_1) = \theta_1$

$Z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \Rightarrow \quad |Z_2| = r_2 \arg(Z_2) = \theta_2$

$$\frac{Z_1}{Z_1} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2\ )}$$

(i) $|z_{1/} z_2| = r_1 / r_2$

$= |z_1| / |z_2|$

(ii) arg $(z_{1/} z_2) = \theta_1 - \theta_2$

$= \arg(Z_1) - \arg(Z_2)$

18. தீர்க்க: $x^4 + 4 = 0$

தீர்வு :

$x^4 = -4$

$x = \sqrt{2}(-1)^{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{2}(\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{2}(\cos(2k\pi + \pi) + i\sin(2k\pi + \pi))^{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{2}(\cos(2k+1)\frac{\pi}{4} + i \sin(2k+1)\frac{\pi}{4})$

இங்கு $k = 0, 1, 2, 3.$

19) சுருக்குக: $\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3}{(\sin\beta + i\cos\beta)^4}$

தீர்வு : $\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3}{(\sin\beta + i\cos\beta)^4} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3}{i^4(\cos\beta - i\sin\beta)^4}$

$$= \frac{(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)}{(\cos 4\beta - i\sin 4\beta)}$$

$$= \cos(3\alpha + 4\beta) + i\sin(3\alpha + 4\beta)$$

4. பகுமுறை வடிவகணிதம்

10 மதிப்பெண்வினாக்கள்

1. $5x+12y=9$ என்ற நேர்க்கோடு அதிபரவளையம் $x^2-9y^2=9$ -ஐத் தொடுகிறது என நிரூபிக்க. மேலும் தொடும் புள்ளியையும் காண்க.

தீர்வு: நேர்க்கோடு $5x+12y=9$

$$12y=-5x+9$$
$$y=-\frac{5}{12}x+\frac{9}{12}$$
$$m=-\frac{5}{12}, c=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

அதிபரவளையம் $x^2-9y^2=9$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1$$
$$a^2=9, b^2=1$$
$$c^2=a^2m^2-b^2$$

$\frac{9}{16}$ $=9\left(\frac{25}{144}\right)-1=\frac{9}{16}$

$\therefore 5x+12y=9$என்ற நேர்க்கோடு அதிபரவளையம்$x^2-9y^2=9$ -ஐத் தொடுகிறது.

தொடும் புள்ளி :$\left(\frac{-a^2m}{c},\frac{-b^2}{c}\right)=\left(5,-\frac{4}{3}\right)$

2. $x-y+4=0$என்ற நேர்க்கோடு நீள்வட்டம் $x^2+3y^2=12$ -ஐத் தொடுகிறது என நிரூபிக்க. மேலும் தொடும் புள்ளியையும் காண்க.

தீர்வு:

நேர்க்கோடு $x-y+4=0 \Rightarrow y=x+4$

$$m=1, c=4$$

நீள்வட்டம் $x^2+3y^2=12$

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$$
$$a^2=12, b^2=4$$
$$c^2=a^2m^2+b^2$$
$$16=12+4=16$$

$x-y+4=0$ என்ற நேர்க்கோடு நீள்வட்டம்$x^2+3y^2=12$ - ஐத் தொடுகிறது.

தொடும் புள்ளி :$\left(\frac{-a^2m}{c},\frac{-b^2}{c}\right)=(-3,1)$

3. $x+2y-5=0$-ஐ ஒரு தொலைத் தொடுகோடா கவும்$(6,0)$மற்றும் $(-3,0)$என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லக்கூடியதுமான செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.O-2006,M-2007,J-2007,M-2008,O-2008,O-2010

தீர்வு:

ஒரு தொலைத் தொடுகோடு $x+2y-5=0$

எனவே, மற்றொரு தொலைத் தொடுகோடு $2x-y+k=0$

சேர்ப்பு சமன்பாடு $(x+2y-5)(2x-y+k)=0$

எனவே,அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டின் வடிவம்

$$(x+2y-5)(2x-y+k)=A$$

அதிபரவளையம் $(6, 0)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதால்,

$$(1)(12 + k) = A$$

$$12 + k = A \qquad (1)$$

அதிபரவளையம் $(-3, 0)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதால்,

$$(-8)(-6 + k) = A$$

$$48 - 8k = A \qquad (2)$$

$$(1), (2) \qquad \Rightarrow k = 4$$

$$A = 16$$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$(x + 2y - 5)(2x - y + 4) = 16$$

4. அதிபரவளையத்தின் மையம் $(2, 4)$.மேலும் $(2, 0)$ வழியே செல்கிறது. இதன் தொலைத் தொடுகோடுகள் x+2y-12=0 மற்றும் $x - 2y + 8 = 0$ ஆகியவற்றிற்கு இணையாக இருக்கின்றன எனில் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

M-2006,J-2006,J-2008,M-2009

தீர்வு: தொலைத் தொடுகோடுகளின் இணை கோடுகள்

$$x + 2y - 12 = 0 \text{ மற்றும் } x - 2y + 8 = 0$$

∴ தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளின் வடிவம்

$$x + 2y + l = 0 \text{ மற்றும் } x - 2y + m = 0$$

இது மையம் $(2, 4)$ வழியாகச் செல்கிறது. எனவே

$$l = -10$$

$$m = 6$$

∴ தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$x + 2y - 10 = 0 \text{ மற்றும் } x - 2y + 6 = 0$$

தொலைத் தொடு கோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு

$$(x + 2y - 10)(x - 2y + 6) = 0$$

எனவே,அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டின் வடிவம்

$$(x + 2y - 10)(x - 2y + 6) = k$$

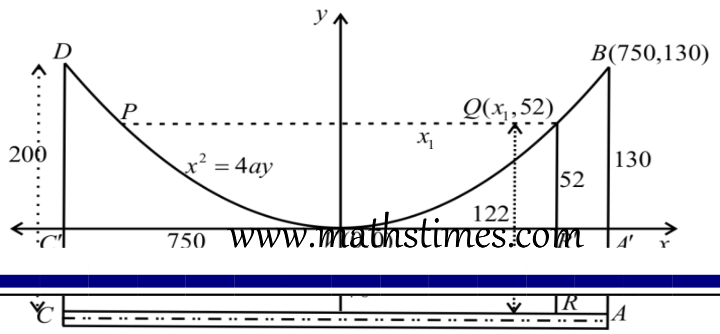
இது $(2, 0)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதால்,

$$k = -64$$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $(x + 2y - 10)(x - 2y + 6) = -64$

5. ஒரு தொங்கு பாலத்தின் கம்பி வடம் பரவளைய வடிவிலுள்ளது. அதன் பாரம் கிடைமட்டமாக சீராக பரவியுள்ளது. அதைத் தாங்கும் இரு தூண்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் 1500 அடி. கம்பி வடத்தை தாங்கும் புள்ளிகள் தூணில் தரையிலிருந்து 200 அடி உயரத்தில் அமைந்துள்ளன. மேலும் தரையிலிருந்து கம்பி வடத்தின் தாழ்வான புள்ளியின் உயரம் 70 அடி, கம்பிவடம் 122 அடி உயரத்தில் தாங்கும் கம்பத்திற்கு இடையே உள்ள செங்குத்து நீளம் காண்க.(தரைக்கு இணையாக)

தீர்வு: மேற்புறம் திறப்புடைய பரவளையம் $x^2 = 4ay$.



www.mathstimes.com

புள்ளி $B(750, 130)$ பரவளையத்தின் மீது அமைந்துள்ளது.

$$(750)^2 = 4a(130)$$

$$4a = \frac{750 \times 750}{130} = \frac{75 \times 750}{13}$$

கம்பி வடத்தின் சமன்பாடு $x^2 = \frac{75\times750}{13}y$.

$Q(x_1, 52)$ என்ற புள்ளி பரவளையத்தின் மீது அமைந்துள்ளது.

$$\therefore x_1^2 = \frac{75 \times 750}{13} \times 52 = 75 \times 750 \times 4$$

$$x_1^2 = 75 \times 75 \times 10 \times 4$$

$$\Rightarrow x_1 = 75 \times 2\sqrt{10} = 150\sqrt{10}$$

$$PQ = 2x_1 = 300\sqrt{10} \text{ அடி}$$

6. ஒரு தொங்கு பாலத்தின் கம்பி வடம் பரவளைய வடிவிலுள்ளது. அதன் நீளம் 40மீட்டர் ஆகும். வழிப்பாதையானது கம்பி வடத்தின் கீழ்மட்டப் புள்ளியிலிருந்து 5 மீட்டர் கீழே உள்ளது. கம்பி வடத்தை தாங்கும் தூண்களின் உயரங்கள் 55 மீட்டர் எனில் 30 மீட்டர் உயரத்தில் கம்பி வடத்திற்கு ஒரு துணை தாங்கி கூடுதலாகக் கொடுக்கப்பட்டால் அத்துணைத்தாங்கியின் நீளத்தைக் காண்க.J-2006

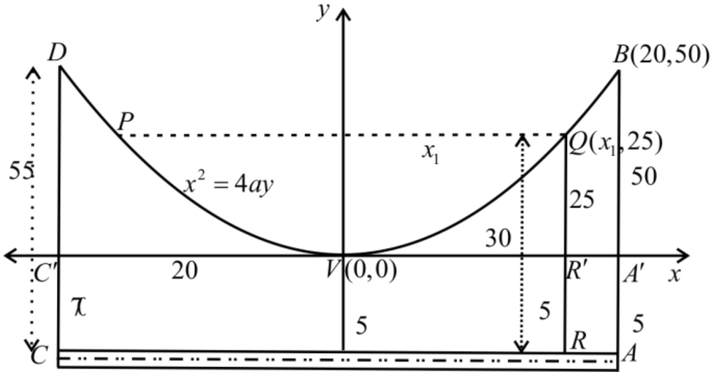
தீர்வு:

மேற்புறம் திறப்புடைய பரவளையம் $x^2 = 4ay$.

$A(20, 50)$ பரவளையத்தின் மீது அமைந்துள்ளது.

$$(20)^2 = 4a(50)$$

$$\Rightarrow 4a = \frac{20 \times 20}{50} = 8$$



கம்பி வடத்தின் சமன்பாடு $x^2 = 8y$.

$Q(x_1, 25)$ என்ற புள்ளி பரவளையத்தின் மீது அமைந்துள்ளது.

$$\therefore x_1^2 = 8 \times 25 = 2 \times 4 \times 25$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2} \times 2 \times 5 = 10\sqrt{2}$$

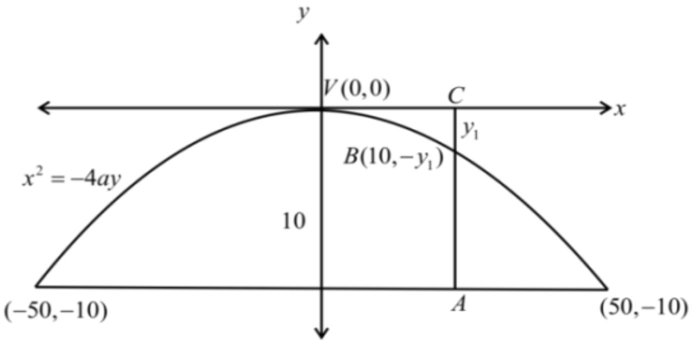
$$PQ = 2x_1 = 20\sqrt{2} \text{ மீட்டர்.}$$

7. ஒரு ரயில்வே பாலத்தின் மேல் வளைவு பரவளையத்தின் அமைப்பைக் கொண்டுள்ளது. அந்த வளைவின் அகலம் 100 அடியாகவும் அவ்வளைவின் உச்சிப்புள்ளியின் உயரம் பாலத்திலிருந்து 10 அடியாக வும் உள்ளது எனில், பாலத்த்தின் மத்தியிலி ருந்து இடப்புறம் அல்லது வலப்புறம் 10 அடி தூரத்தில் பாலத்தின் மேல் வளைவு எவ்வளவு உயரத்தில் இருக்கும்? **M-2009**

தீர்வு:

கீழ்நோக்கித் திறப்புடைய பரவளையம் $x^2 = -4ay$

இது$(50, -10)$ வழியாகச் செல்கிறது.



$\therefore 50 \times 50 = -4a(-10)$

$\Rightarrow a = \dfrac{250}{4}$

$\therefore x^2 = -4\left(\dfrac{250}{4}\right)y \Rightarrow x^2 = -250y$

பரவளையத்தின் மேல் உள்ள புள்ளி $B(10, -y_1)$ என்க.

$$\therefore 100 = -250(-y_1)$$

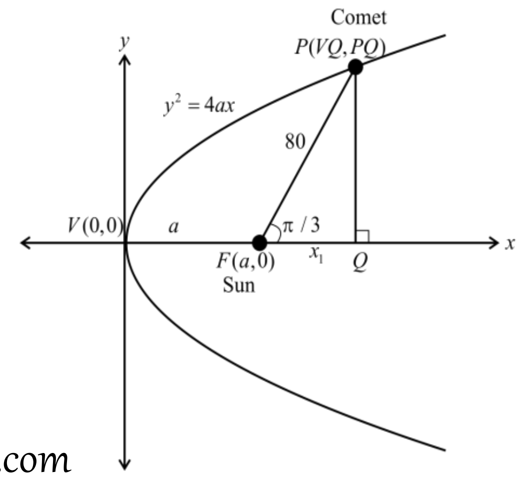
$$\Rightarrow y_1 = \frac{100}{250} = \frac{2}{5}$$

$$AB = 10 - \frac{2}{5} = \frac{50-2}{5} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5} \text{ அடி}$$

அதாவது, தேவைப்பட்ட இடத்தில் பாலத்தின் உயரம் $9\frac{3}{5}$ அடி ஆகும்.

8. ஒரு வால் விண்மீன் ஆனது சூரியனைச் சுற்றி பரவளையப் பாதையில் செல்கிறது மற்றும் சூரியன் பரவளையத்தின் குவியத்தில் அமைகிறது. வால் விண்மீன் சூரியனிலிருந்து 80மில்லியன் கி.மீ. தொலைவில் அமைந்து இருக்கும் போது வால் விண்மீனையும் சூரியனையும் இணைக்கும் கோடு அச்சுடன் $\frac{\pi}{3}$ கோணத்தினை ஏற்படுத்துமானால் (i) வால் விண்மீனின் பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (ii) வால் விண்மீன் சூரியனுக்கு எவ்வளவு அருகில் வரமுடியும் என்பதையும் காண்க.(பாதை வலதுபுறம் திறப்புடையதாக கொள்க) **M-2008**

தீர்வு: வால் விண்மீனின் பாதை $y^2 = 4ax$ என்க.



P என்பது $(VQ, PQ) = (a + 40, 40\sqrt{3})$.

P என்பது பரவளையதின் மீதுள்ளதால்,

$(40\sqrt{3})^2 = 4a(a + 40)$

$1600 \times 3 = 4a^2 + 160a$

$4a^2 + 160a - 4800 = 0$

$a^2 + 40a - 1200 = 0$

$(a + 60)(a - 20) = 0$

$a = -60$ அல்லது$a = 20$

$a = -60$ ஏற்புடையதல்ல.

வால் விண்மீனின் பாதையின் சமன்பாடு

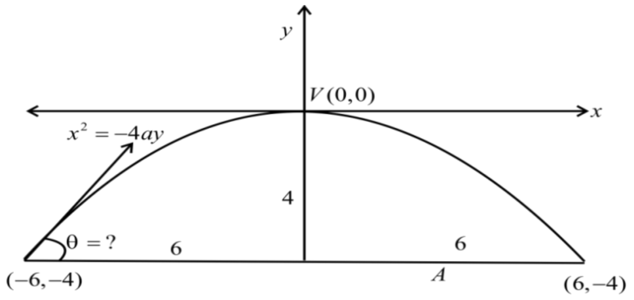
$$y^2 = 80x$$

சூரியனுக்கும் வால் விண்மீனுக்கும் இடையேயுள்ள மிகக் குறைந்த தூரம் $VF = a = 20$மில்லியன் கி.மீ.

9. ஒரு ராக்கெட் வெடியானது கொளுத்தும் போது அது ஒரு பரவளையப் பாதையில் செல்கிறது. அதன் உச்ச உயரம் 4 மீட்டர் ஐ எட்டும்போது அது கொளுத்தப்பட்ட இடத்திலிருந்து கிடைமட்ட தூரம் 6 மீட்டர் தொலைவிலுள்ளது. இறுதியாக கிடைமட்டமாக 12மீ தொலைவில் தரையை வந்தடைகிறது எனில் புறப்பட்ட இடத்தில் தரையுடன் ஏற்படுத்தும் எறிகோணம் காண்க.

M-2006, J-2009,J-2010

தீர்வு:



பரவளையப் பாதையின் சமன்பாடு

$x^2 = -4ay$ ஆகும்.

இது$(6, -4)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore 6^2 = -4a(-4)$$

$$36 = 16a \Rightarrow a = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

பரவளையப் பாதையின் சமன்பாடு

$$x^2 = -4\left(\frac{9}{4}\right)y$$

$$x^2 = -9y$$

x- ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$2x = -9\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{-9} = -\frac{2}{9}x$$

$(-6, -4)$இல்

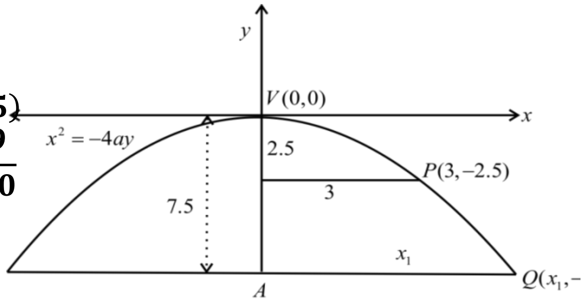
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{9} \times -6 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

அதாவது, $\tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

∴ராக்கெட் வெடியானது புறப்பட்ட இடத்தில் தரையுடன் ஏற்படுத்தும் எறிகோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

10. தரைமட்டத்திலிருந்து 7.5மீ உயரத்தில் தரைக்கு இணையாக பொருத்தப்பட்ட ஒரு குழாயிலிருந்து வெளியேறும் நீர் தரையைத் தொடும் பாதை ஒரு பரவளையத்தை ஏற்படுத்துகிறது. மேலும் இந்த பரவளையப் பாதையின் முனை குழாயின் வாயில் அமைகிறது. குழாய் மட்டத்திற்கு 2.5மீ கீழே நீரின் பாய்வானது குழாயின் முனை வழியாகச் செல்லும் நிலை குத்துக்கோட்டிற்கு 3 மீட்டர் தூரத்தில் உள்ளது எனில் குத்துக் கோட்டிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திற்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழும்.O-2009

பரவளையப் பாதையின் சமன்பாடு $x^2 = -4ay$ ஆகும்.



P என்பது $(3, -2 \cdot 5)$ ஆகும்.

$$3^2 = -4a(-2.5)$$
$$9 = 10a \Rightarrow a = \frac{9}{10}$$

பரவளையப் பாதையின் சமன்பாடு

$$x^2 = -4\left(\frac{9}{10}\right)y$$

$(x_1, -7 \cdot 5)$ என்ற புள்ளியும் பரவளையப் பாதையில் அமைந்து இருக்கும். எனவே

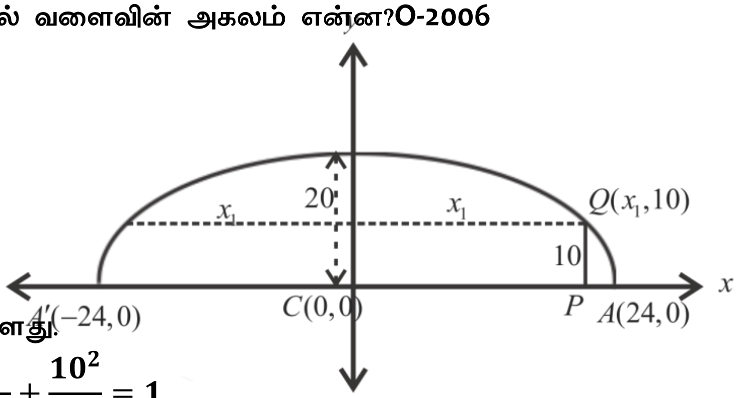
$$x_1^2 = -4 \times \frac{9}{10} \times -7 \cdot 5 = 30 \times \frac{9}{10} = 9 \times 3$$
$$x_1 = 3\sqrt{3}$$

எனவே குத்துக் கோட்டிலிருந்து $3\sqrt{3}$ மீட்டர் தூரத்திற்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழும்.

11. ஒரு வளைவு அரை-நீள்வட்ட வடிவில் உள்ளது. அதன் அகலம் 48 அடி, உயரம் 20 அடி. தரையிலிருந்து 10 அடி உயரத்தில் வளைவின் அகலம் என்ன? O-2006

தீர்வு: $2a = 48 \Rightarrow a = 24$

$b = 20$



நீள்வட்டதின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{24^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1$$

$(x_1, 10)$ என்ற புள்ளி நீள்வட்டதின் மீதுள்ளது.

$$\therefore \frac{x_1^2}{24^2} + \frac{10^2}{20^2} = 1$$
$$\frac{x_1^2}{24^2} = 1 - \frac{100}{400} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$\therefore x_1^2 = 24^2\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$x_1 = 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

மையத்திலிருந்து தரையிலிருந்து 10 அடி உயரத்தில் வளைவின் அகலம் $2x_1 = 2 \times 12\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ அடி.

12. ஒரு பாலத்தின் வளைவானது அரை-நீள்வட்ட வடிவில் உள்ளது. கிடைமட்டத்தில் அதன் அகலம் 40 அடியாகவும், மையத்திலிருந்து அதன் உயரம் 16 அடியாகவும் உள்ளது எனில் மையத்திலிருந்து வலது அல்லது இடப் புறத்தில் 9 அடி தூரத்தில் உள்ள தரைப்புள்ளியிலிருந்து பாலத்தின் உயரம் என்ன? O-2010

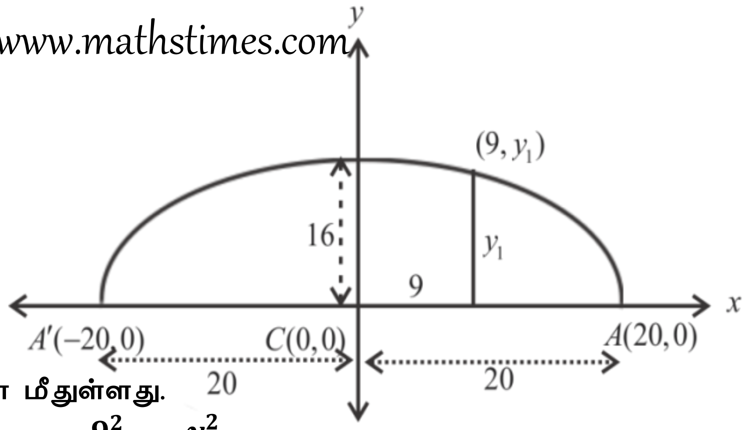
தீர்வு: $2a = 40 \Rightarrow a = 20$

$b = 16$

நீள்வட்டதின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{256}=1$$



$(9, y_1)$ என்ற புள்ளி நீள்வட்டதின் மீதுள்ளது.

$$\therefore \frac{9^2}{400}+\frac{y_1^2}{256}=1$$

$$\frac{y_1^2}{256}=1-\frac{9^2}{400}=1-\frac{81}{400}=\frac{400-81}{400}=\frac{319}{400}$$

$$\therefore y_1^2=256\left(\frac{319}{400}\right)$$

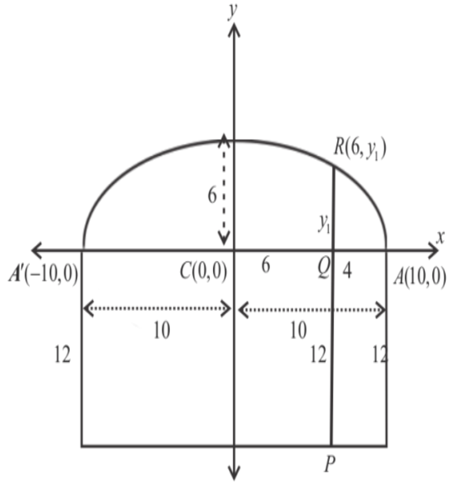
$$y_1=\frac{16}{20}\sqrt{319}=\frac{4}{5}\sqrt{319}$$

மையத்திலிருந்து வலது அல்லது இடப் புறத்தில் 9 அடி தூரத்தில் உள்ள தரைப்புள்ளியிலிருந்து பாலத்தின் உயரம் $\frac{4}{5}\sqrt{319}$ அடி.

13. ஒரு நுழைவு வாயிலின் மேற்கூரையானது அரை-நீள்வட்ட வடிவில் உள்ளது. இதன் அகலம் 20 அடி. மையத்திலிருந்து அதன் உயரம் 18 அடி மற்றும் பக்கச் சுவரிகளின் உயரம் 12 அடி எனில் ஏதேனும் ஒரு பக்கச் சுவரிலிருந்து 4 அடி தூரத்தில் மேற்கூரையின் உயரம் என்னவாக இருக்கும்?

தீர்வு: படத்தின் மூலம் ,$AA'=2a=20 \Rightarrow a=10$

$$b=18-12=6$$



நீள்வட்டதின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$$

$R(6, y_1)$ என்ற புள்ளி நீள்வட்டதின் மீதுள்ளது.

$$\therefore \frac{6^2}{100}+\frac{y_1^2}{36}=1$$

$$\frac{y_1^2}{36}=1-\frac{36}{100}=\frac{64}{100}$$

$$\therefore y_1^2=36\left(\frac{64}{100}\right)$$

$$y_1=6\times\frac{8}{10}=\frac{48}{10}=4\cdot 8$$

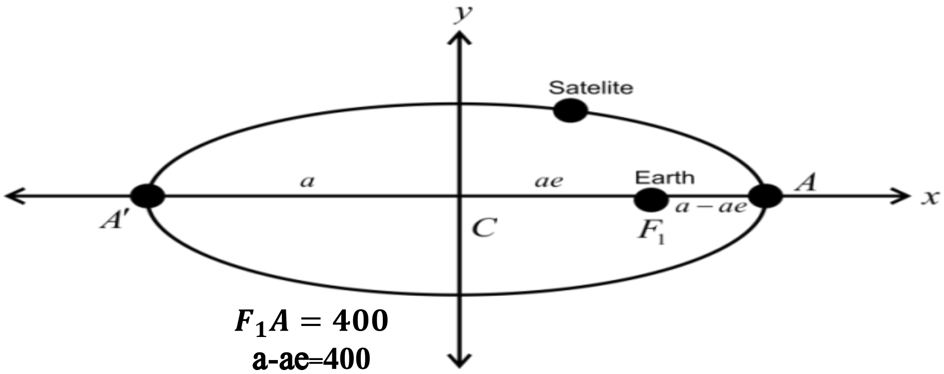
மேற்கூரையின் உயரம் $=12+4\cdot 8$

$=16\cdot 8$ அடி.

14. ஒரு நீள்வட்டப் பாதையின் குவியத்தில் பூமி இருக்குமாறு ஒரு துணைக்கோள் சுற்றி வருகிறது. இதன் மையத் தொலைவு தகவு $\frac{1}{2}$ ஆகவும் பூமிக்கும் துணைக் கோளுக்கும் இடைப்பட்ட மீச்சிறு தூரம் 400 கிலோ மீட்டர்கள் ஆகவும் இருக்குமானால் துணைக் கோளுக்கும் பூமிக்கும் இடைப்பட்ட அதிகபட்ச தூரம் என்ன? **J-2007,J-2008**

தீர்வு:

e= **1/2**



$$F_1A = 400$$

a-ae=400

a(1-e)=400

a(1-1/2)= 400

a= 2x400

a=800

அதிகபட்ச தூரம் $=F_1A'$

$$= a + ae$$

= a(1+e)

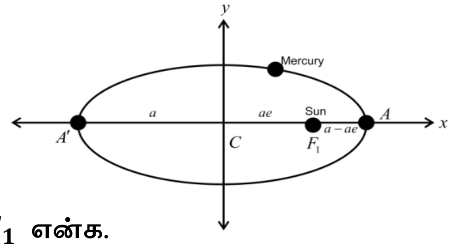
= 800x(1+1/2)

$$= 1200$$

துணைக் கோளுக்கும் பூமிக்கும் இடைப்பட்ட அதிகபட்ச தூரம் தூரம்1200 கிலோ மீட்டர்கள்.

15. சூரியன் குவியத்திலிருக்குமாறு மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனை ஒரு நீள்ட்டப் பாதையில் சுற்றி வருகிறது. அதன் அரை நெட்டச்சின் நீளம் 36 மில்லியன் மைல்கள் ஆகவும் மையத் தொலைவு தகவு $0\cdot 206$ ஆகவும் இருக்குமாயின் (i) மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிக அருகாமையில் வரும்போது உள்ள தூரம் (ii) மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிகத் தொலைவில் இருக்கும் போது உள்ள தூரம் ஆகியவற்றைக் காண்க. **O-2009,J-2010**

தீர்வு:



படத்தில் சூரியனின் நிலை F_1 என்க.

$$CA = a = 36, e = 0\cdot 206$$

$$ae = 36 \times 0\cdot 206 = 7\cdot 416$$

(i)மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிக அருகாமையில் வரும்போது உள்ள தூரம்

$$F_1A = a - ae = 36 - 7 \cdot 416 = 28 \cdot 584$$

(ii) மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிகத் தொலைவில் இருக்கும் போது உள்ள தூரம்

$$F_1A' = a + ae = 36 + 7 \cdot 416 = 43 \cdot 416$$

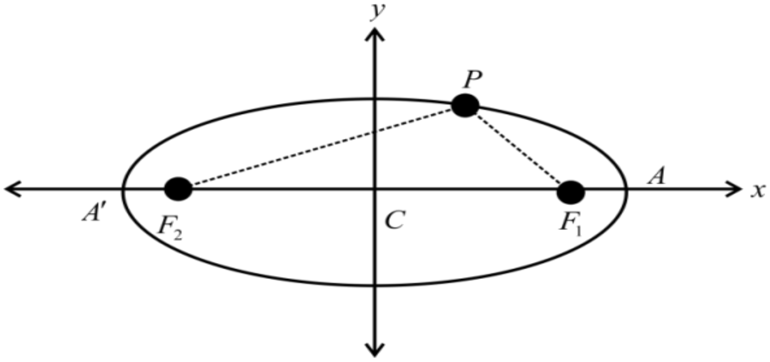
மெர்க்குரி கிரகமானது சூரியனுக்கு மிகத் தொலைவில் இருக்கும் போது உள்ள தூரம் $43 \cdot 416$ மில்லியன் மைல்கள்

16. ஒரு கோ-கோ விளையாட்டு வீரர் விளையாட்டுப் பயிற்சியின் போது அவருக்கும் கோ-கோ குச்சிக்களுக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் எப்பொழுதும்8 மீ ஆக இருக்குமாறு உணர்கிறார். அவ்விரு குச்சிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் 6 மீ எனில் அவர் ஓடும் பாதையின் சமன்பாடைக் காண்க.

தீர்வு:

கோ-கோ குச்சிகள் இரண்டும் F_1 மற்றும் F_2 இல் அமைந்துள்ளன எனக் கொள்க. $P(x, y)$ என்ற புள்ளியானது விளையாட்டு வீரரின் நிலை எனக் கொள்க.

$$\therefore F_1P + F_2P = 2a = 8$$
$$\therefore a = 4$$
$$F_1F_2 = 2ae = 6$$
$$ae = 3$$
$$4e = 3 \Rightarrow e = \frac{3}{4}$$



மேலும்,

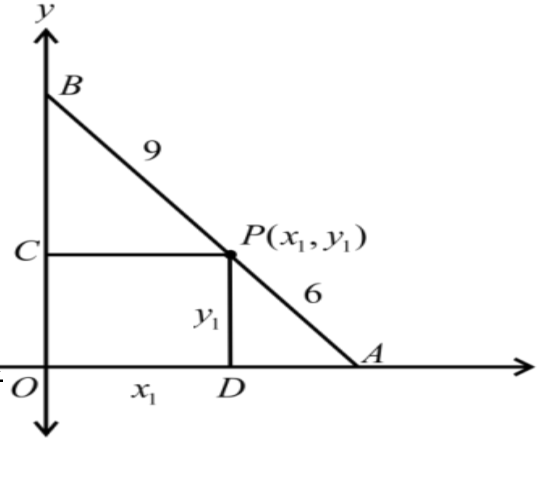
$$b^2 = a^2(1 - e^2) = 16\left(1 - \frac{9}{16}\right) = 16 \times \frac{16 - 9}{16} = 7$$

∴ பாதையின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{7} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

17. ஒரு சமதளத்தின் மேல் செங்குத்தாக அமைந்துள்ள சுவரின் மீது 15மீ நீளமுள்ள ஏணியானது தளத்தினையும் சுவற்றினையும் தொடுமாறு நகர்ந்து கொண்டு இருக்கிறது எனில் ஏணியின் கீழ்மட்ட முனையிலிருந்து 6மீ தூரத்தில் ஏணியில் அமைந்துள்ள P என்ற புள்ளியின் நியமப்பாதைக் காண்க. O-2007,O-2008

தீர்வு:



$$\sin\theta = \frac{PD}{PA} = \frac{y_1}{6}$$

$\triangle CPB$யில்

$$\cos\theta = \frac{PC}{PB} = \frac{OD}{PB} = \frac{x_1}{9}$$
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\Rightarrow \left(\frac{x_1}{9}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{6}\right)^2 = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{81} + \frac{y_1^2}{36} = 1$$

$\therefore P(x_1, y_1)$இன் நியமப்பாதை

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

இது ஒரு நீள்வட்டமாகும்.

6. வகைநுண்கணித பயன்பாடுகள்- II (6 marks)

1) $u = log(tan\,x + tan\,y + tan\,z)$எனில்$\sum \sin 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 2$. என ***நிரூபி.***

$(March - 2007, June - 2008, Oct - 2008)$

தீர்வு : $u = \log(\tan x + \tan y + \tan z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sec^2 x}{\tan x + \tan y + \tan z}$$

$$Sin\ 2x\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{sin\,2x\ sec^2 x}{tan\,x + tan\,y + tan\,z} = \frac{2\ \tan x}{tan\,x + tan\,y + tan\,z}$$

$$Sin\ 2y\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{sin\,2y\ sec^2 y}{tan\,x + tan\,y + tan\,z} = \frac{2\ \tan y}{tan\,x + tan\,y + tan\,z}$$

$$Sin\ 2z\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{sin\,2z\ sec^2 z}{tan\,x + tan\,y + tan\,z} = \frac{2\ \tan z}{tan\,x + tan\,y + tan\,z}$$

கூட்ட,$\sum \sin 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 2.$

2) $u = (x - y)(y - z)(z - x)$ எனில் $u_x + u_y + u_z = 0$.எனக் காட்டுக. $(Mar - 2006)$

தீர்வு :$u_x = (y - z)[(x - y)(-1) + (z - x).1]$

$$= (y - z)[-(x - y) + (z - x)]$$
$$= (y - z)(z - x) - (y - z)(x - y)$$
$$u_y = (z - x)(x - y) - (z - x)(y - z)$$
$$u_z = (x - y)(y - z) - (x - y)(z - x)$$

கூட்ட$U_x + U_y + U_z = 0.$

3) ஒரு தனி ஊசலின் நீளம் lமற்றும் முழு அலைவு நேரம் T எனில் $T = k\sqrt{l}$ $(k -$ என்பது மாறிலி) தனி ஊசலின் நீளம் 32.1 செ.மீ. இருந்து 32.0 செ.மீ. க்கு மாறும் போது நேரத்தில் ஏற்படும் சதவீதப் பிழையைக் கணக்கிடுக

தீர்வு : $T = k\sqrt{l}$

$$\log T = \log k + \frac{1}{2}\log\ l$$
$$\frac{1}{T}dT = 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{l}\ dl$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{dT}{T} = 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{l}\ dl$$

$$\frac{\Delta T}{T} x100 = \frac{1}{2}\frac{dl}{l} x100$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-0.1}{32.1}\right) x100 = -0.156\ \%$$

அலைவு நேரத்தில் ஏற்படும் சத வீதப் பிழை : 0.156% குறைவு ஆகும்.

4) வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி $\sqrt{36.1}$ க்கு தோராய மதிப்புக் காண்க

தீர்வு: $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ என்க $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f(36) = 6$ என்பதால் $x = 6, dx = \Delta x = 0.1$ எனக் கொள்க.

$dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$x = 36, dx = \Delta x = 0.1; f(36) = 6$

$dy = \frac{1}{3}(36)^{\frac{1}{2}}(0.1) = \frac{0.1}{12} = 0.008$

$\sqrt{36.1} = 6 + 0.008 = 6.0083$

5) வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி $\sqrt[3]{65}$ க்கு தோராய மதிப்புக் காண்க

தீர்வு:

$y = f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ என்க $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$f(64) = 4$ என்பதால் $x = 64, dx = \Delta x = 1$ எனக் கொள்க.

$dy = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

$dy = \frac{1}{3}(64)^{-\frac{2}{3}}(1) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{64^{\frac{1}{3}}}\right]^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{f(64)}\right)^2$

$= dy = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{48} = 0.021$

$\sqrt[3]{65} = 4 + 0.021 \approx 4.021$

6) $w = x + 2y + z^2$ என்ற சார்பில் $x = \cos t\,; y = \sin t; z = t$ எனில் சங்கிலி விதியை பயன்படுத்தி $\frac{dw}{dt}$ காண்க

தீர்வு:

$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$

$\frac{\partial w}{\partial x} = 1; \frac{dx}{dt} = -\sin t\,; \frac{\partial w}{\partial y} = 2; \frac{dy}{dt} = \cos t$

$\frac{\partial w}{\partial z} = 2z; \frac{dy}{dt} = 1$

$\frac{dw}{dt} = 1(1 - \sin t) + 2\cos t + 2z = -\sin t + 2\cos t + 2t$

7) $w = x^2 + y^2$ என்ற சார்பில் $; x = u^2 - v^2; y = 2uv$ எனில் சங்கிலி விதியை பயன்படுத்தி $\frac{\partial w}{\partial u}$ மற்றும் $\frac{\partial w}{\partial y}$ காண்க

தீர்வு:

$w = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 2x; \frac{\partial w}{\partial y} = 2y$

$x = u^2 - v^2 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial u} = 2u; \frac{\partial y}{\partial v} = -2v$

$y = 2uv \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial u} = 2v; \frac{\partial y}{\partial v} = 2u$

$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$

$\frac{\partial w}{\partial u} = 2x \times 2u + 2y \times 2v$

$\frac{\partial w}{\partial u} = 4(u^2 - v^2)u + 4(2uv)v = 4u^2 - 4uv^2 + 8uv^2$

$\frac{\partial w}{\partial u} = 4u^2 + 4uv^2 = 4u(u + v^2)$

$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

$\frac{\partial w}{\partial u} = 2x(-2v) + 2y(2u)$

$\frac{\partial w}{\partial u} = -4(u^2 - v^2)v + 4(2uv)u = -4u^2v - 4v^3 + 8u^2v$

$\frac{\partial w}{\partial u} = 4u^2v - 4v^3 = 4v(u^2 + v^2)$

8) $\boldsymbol{w = log\,(x^2 + y^2)}$ **இங்கு** $\boldsymbol{x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta}$ **எனில் சங்கிலி விதியை பயன்படுத்தி** $\frac{\partial w}{\partial r}$ **மற்றும்** $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ **கணக்கிடுக.**

தீர்வு : $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2x\cos\theta + \frac{1}{x^2 + y^2} 2y\sin\theta$$

$$= \frac{2}{r^2}(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta) = \frac{2}{r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2x(-r\sin\theta) + \frac{1}{x^2 + y^2} 2y\,(r\cos\theta)$$

$$= \frac{2r}{r^2}(-x\sin\theta + y\cos\theta)$$

$= \frac{2r}{r^2}(-r\sin\theta\cos\theta + r\sin\theta\cos\theta)$

$$= 0$$

9) $V = ze^{ax+by}$ மற்றும் z ஆனது $x, y -$ இல் n ஆம் படி சமபடித்தான சார்பாயின் $x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} = (ax + by + n)V$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $V = ze^{ax+by}$

$$x\frac{\partial V}{\partial x} = x\left[ze^{ax+by}.a + e^{ax+by}\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

$$y\frac{\partial V}{\partial y} = y\left[ze^{ax+by}.b + e^{ax+by}\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

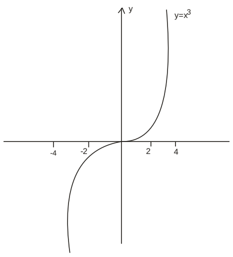
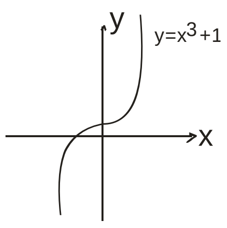
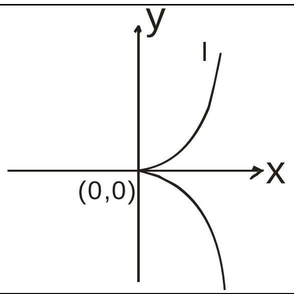
$$x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} = e^{ax+by}\left[axz + byz + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

$$= e^{ax+by}[axz + byz + nz]$$

$$= (ax + by + n)V$$

10 மதிப்பெண்வினாக்கள்

பின்வரும் வளைவரைளை வரைக:

	$y=x^3$	$y=x^3+1$	$y^2=2x^3$
1. சார்பகம், நீட்டிப்பு, வெட்டுத்துண்டு மற்றும் ஆதி	சார்பகம் (-α,α)	சார்பகம் (-α,α)	சார்பகம் $x \geq 0$(அ)$[0,\alpha)$
	கிடைமட்ட நீட்டிப்பு (-α,α)	கிடைமட்ட நீட்டிப்பு (-α,α)	கிடைமட்ட நீட்டிப்பு $[0,\alpha)$
	நிலைகுத்து நீட்டிப்பு (-α,α)	நிலைகுத்து நீட்டிப்பு (-α,α)	நிலைகுத்து நீட்டிப்பு (-α,α)
	x வெட்டுத்துண்டு =0	x வெட்டுத்துண்டு =-1	x வெட்டுத்துண்டு =0
	y வெட்டுத்துண்டு =0	y வெட்டுத்துண்டு =1	y வெட்டுத்துண்டு =0
	ஆதிவழிச் செல்கிறது	ஆதிவழிச் செல்லவில்லை	ஆதிவழிச் செல்கிறது. வளைவரையானது முதல் மற்றும் நான்காம் கால் பகுதியில் காணப்பெறும்
2. சமச்சீர் சோதனை	ஆதியைப் பொறுத்தது சமச்சீராக உள்ளது	வளைவரை சமச்சீர் பண்பை பெற்றிருக்கவில்லை	வளைவரையானது x -அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது.
3. தொலைத் தொடுகோடுகள்	தொலைத் தொடுகோடுகள் கிடையாது	தொலைத் தொடுகோடுகள் கிடையாது	தொலைத் தொடுகோடுகள் கிடையாது
4. ஓரியல்புத் தன்மை	வளைவரையானது (-α,α) முழுவதுமாக ஏறுமுகமாகச் செல்லும்	வளைவரையானது (-α,α) முழுவதுமாக ஏறுமுகமாகச் செல்லும்	$y=\sqrt{2}x^{3/2}$ என்ற கிளையில் வளைவரை ஏறுமுகமாக இருக்கும் $y=-\sqrt{2}x^{3/2}$ என்ற கிளையில் வளைவரை இறங்கு முகமாக இருக்கும்
5. சிறப்புப் புள்ளிகள்	(0,α) மேற்புறமாக குழிவாகவும் (-α,0)ல் கீழ்புறமாக குழிவாகவும் இருக்கும். (0,0) என்பது வளைவு மாற்றுப் புள்ளி.	(0,α) மேற்புறமாக குழிவாகவும் (-α,0)ல் கீழ்புறமாக குழிவாகவும் இருக்கும். (0, 1) என்பது வளைவு மாற்றுப் புள்ளி.	(0, 0) என்பது வளைவு மாற்றுப் புள்ளியல்ல
6. படம்			

4) $U=\sin^{-1}\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)$ எனில் யூலரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\tan U$ எனக் காட்டுக.

$$U=\sin^{-1}\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)$$

RHS சமபடித்தானசார்பு அல்ல, எனவே

$\sin U=\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)=f(x,y)$எனவரையறுக்கவும்.

இப்பொழுது f என்பது $\frac{1}{2}$படி உடைய சமபடித்தான சார்பு.

$\therefore$ யூலரின் தேற்றப்படி $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}f$

$x\frac{\partial}{\partial x}(\sin U)+y\frac{\partial}{\partial y}(\sin U)=\frac{1}{2}\sin U$

$x\cos U\frac{\partial u}{\partial x}+y\ \cos U\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\sin U$

$x\ \frac{\partial u}{\partial x}+y\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\tan U$

5) யூலரின் தேற்றதைப் பயன்படுத்தி $u=\tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$ எனில்

$x\ \frac{\partial u}{\partial x}+y\ \frac{\partial u}{\partial y}=\sin 2u$என நிருபிக்க

$u=\tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$

RHS சமபடித்தானசார்பு அல்ல, எனவே

$\tan u=\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)=f(x,y)$என வறையறுக்கவும்

இப்போது f என்பது படி 2 உடைய சமபடித்தான சார்பு.

யூலரின் தேற்றப்படி $x\ \frac{\partial f}{\partial x}+y\ \frac{\partial f}{\partial y}=2f$

$x\ \frac{\partial}{\partial x}(\tan u)+y\ \frac{\partial}{\partial y}(\tan u)=2\tan u$

$x\sec^2 u\ \frac{\partial u}{\partial x}+y\sec^2 u\ \frac{\partial u}{\partial y}=2\tan u$

$x\ \frac{\partial u}{\partial x}+y\ \frac{\partial u}{\partial y}=2\sin 2u$

6) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$க்கு யூலரின் தேற்றத்தை சரிபார்க்க.

க$(tx,ty)=\frac{1}{\sqrt{t^2x^2+t^2y^2}}=\frac{1}{t}\ f(x,y)=t^{-1}f(x,y)$

$\therefore f$என்பது படி -1 உடைய சமபடித்தான சார்பு.

$\therefore$ யூலரின் தேற்றப்படி $x\ \frac{\partial f}{\partial x}+y\ \frac{\partial f}{\partial y}=-f$

சரிபார்த்தல்:

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$x\ \frac{\partial f}{\partial x}+y\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}=-f$

யூலரின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

7) $u=\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ என்பதை சரிபார்.

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad\Longrightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$

8) $u=\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}$எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ என்பதனை சரிபார்க்க

தீர்வு:

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^2}+\frac{2y}{x^3}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2x}{y^3}-\frac{1}{x^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-2x}{y^3}-\frac{1}{x^2}\right]$

$=\frac{-2}{y^3}+\frac{2}{x^3}$ (1)

$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y^2}+\frac{2y}{x^3}\right]$

$=\frac{-2}{y^3}+\frac{2}{x^3}$

From (1) and (2)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$

9) $u=\sin 3x\cos 4y$எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ என்பதனை சரிபார்க்க

தீர்வு:

$u=\sin 3x\cos 4y$

$\frac{\partial u}{\partial x}=3\cos 3x\cos 4y$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-4\sin 3x\sin 4y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}[-4\sin 3x\sin 4y]$

$=-12\cos 3x\sin 4y$ (1)

$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}[3\cos 3x\cos 4y]$

$=-12\cos 3x\sin 4y$ (2)

From (1) and (2)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$

10) வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி $\sqrt[3]{1.02}+\sqrt[4]{1.02}$ இன் தோராய மதிப்புக் காண்க

தீர்வு:

$y=f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}$

$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

$x=1, dx=\Delta x=0.02$எனக் கொள்க

$dy=\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\right)dx$

$x=1, dx=\Delta x=0.02; f(1)=2$

$dy=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(0.02)=\left(\frac{4+3}{2}\right)(0.02)$

$=\frac{0.07}{2}=0.01167$

$\sqrt[3]{1.02}+\sqrt[4]{1.02}=2+0.01167=2.0116$

8. வகைக்கெழுச்சமன்பாடுகள்

6 - மதிப்பெண்வினாக்கள்

1. தீர்க்க $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2\cos x$

தீர்வு:

$P = \cot x \qquad Q = 2\, cos\, x$

$IF = e^{\int Pdx}$

$IF = e^{\int \cot\, x\, dx}$

$IF = e^{\log\, \sin x}$

$= \sin x$

தேவையானதீர்வு:

$y(IF) = \int Q(IF)\, dx + C$

$$y(IF) = \int 2\cos x\, sinx\ \ dx + C$$

$$= \int sin2x\, dx + C$$

$$y\, sinx = -\frac{cos2x}{2} + C$$

2. தீர்க்க $\frac{dy}{dx} + y = x$

தீர்வு:

$P = 1 \qquad Q = x$

$IF = e^{\int Pdx}$

$IF = e^{\int\ dx}$

$IF = e^{x}$

தேவையானதீர்வு:

$$y(IF) = \int Q(IF)\, dx + C$$

$$y(IF) = \int x\, e^{x}\, dx + C$$

$$ye^{x} = e^{x}(x-1) + C$$

3. தீர்க்க $\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2+1}y = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

தீர்வு:

$P = \frac{4x}{x^2+1} \qquad Q = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

$IF = e^{\int Pdx}$

$IF = e^{\int \frac{4x}{x^2+1} dx}$

$IF = e^{2\log(x^2+1)}$

$= (x^2+1)^2$

$$y(IF) = \int Q(IF)\, dx + C$$

$$y(x^2+1)^2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}(x^2+1)^2\, dx + C$$

$y(x^2+1)^2 = x+c$

செய்துபார்க்க

1. தீர்க்க$\frac{dy}{dx}+2ytanx=\sin x$
2. தீர்க்க$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=cosx$
3. தீர்க்க$\frac{dy}{dx}+xy=x$
4. தீர்க்க$(D^2+14D+49)y=e^{-7x}+4$

10 மதிப்பெண்வினாக்கள்

1. தீர்க்க$(x+y)^2\frac{dy}{dx}=1$

தீர்வு:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+y)^2}$$

$x+y=z$என்க

$$\frac{dy}{dx}+1=\frac{dz}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$$
$$z^2\left(\frac{dz}{dx}-1\right)=1$$
$$z^2\frac{dz}{dx}=1+z^2$$
$$\frac{z^2}{1+z^2}dz=dx \Rightarrow \frac{(1+z^2-1)dz}{1+z^2}=dz$$
$$\int\left(1-\frac{1}{1+z^2}\right)dz=\int dx+c$$
$$z-tan^{-1}z=x+c$$
$$y-tan^{-1}(x+y)=C$$

2. தீர்க்க: $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=2e^{3.x}$இங்கு$x=\log 2$, $y=0$மற்றும்$x=0$ எனில் $y=0$

தீர்வு:

$$AE: P^2-3P+2=0$$
$$(P-2)(P-1)=0$$
$$P=1,2$$
$$CF: Ae^{x}+Be^{2x}$$

$$PI = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} 2e^{3x}$$
$$= \frac{2}{3^2 - 3 \times 3 + 2} e^{3x}$$
$$= e^{3x}$$
$G.S$:
$$y = C.F + P.I$$
$$y = Ae^{x} + Be^{2x} + e^{3x}$$
……………………………………………………………………….. (1)

$x = log2$எனில்$y = 0$

$$0 = Ae^{log2} + Be^{2log2} + e^{3log2}$$
$$0 = 2A + 4B + 8$$
$\therefore A + 2B = -4$ ……………………………………………………………. (2)

$x = 0$எனில்$y = 0$

$$0 = A + B + 1$$
$A + B = -1$ ………………………………………………………….. (3).

$(2) - (3) \Rightarrow B = -3$

(3)⇒ $A = 2$

(1)⇒ $y = 2e^{2x} - 3e^{x} + e^{3x}$

3. தீர்க்க:$(D^2 - 1)y = cos2x - 2sin2x$

தீர்வு:

$AE: P^2 - 1 = 0$
$$P = \pm 1$$
$CF: Ae^{x} + Be^{-x}$
$$PI = \frac{1}{D^2 - 1}(cos2x - 2sin2x)$$
$$= \frac{1}{D^2 - 1} cos2x - \frac{2}{D^2 - 1} sin2x$$
$$= \frac{1}{-4 - 1} cos2x - \frac{2}{-4 - 1} sin2x$$
$$= -\frac{1}{5} cos2x + \frac{2}{5} sin2x$$
$G.S$:
$$y = C.F + P.I$$
$$y = Ae^{x} + Be^{-x} - \frac{1}{5} cos2x + \frac{2}{5} sin2x$$

4. ஒரு நகரத்தில் உள்ள மக்கள் தொகையின் வளர்ச்சி வீதம் அந்நேரத்தில் உள்ளமக்கள் தொகைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. 1960 ஆம் ஆண்டில் மக்கள் தொகை 1,30,000 எனவும் 1990ல் மக்கள்தொகை1,60,000 ஆகவும் இருப்பின் 2020 ஆம் ஆண்டில் மக்கள் தொகை எவ்வளவு இருக்கும். $\left[log\frac{16}{13} = 0.2070, e^{0.42} = 1.52\right]$

தீர்வு:

tநேரத்தில்மக்கள்தொகைA என்க

$\frac{dA}{dt} \propto A$

$\frac{dA}{dt} = kA$

$\Longrightarrow A = Ce^{kt}$

1960 ஆம்ஆண்டைஆரம்பஆண்டாகக்கொள்வோம்

$t = 0$ எனும்போது $\mathrm{A} = 1{,}30{,}000$

$1{,}30{,}000 = Ce^{0}$

$1{,}30{,}000 = C$

$$\therefore A = 1{,}30{,}000e^{kt}$$

$t = 30$ எனில் $\mathrm{A} = 1{,}60{,}000$

$$1{,}60{,}000 = 1{,}30{,}000e^{30k}$$

$\frac{16}{13} = e^{30k}$

$t = 60$ **எனில்** $\mathrm{A} = ?$

$$A = 1{,}30{,}000e^{60k}$$
$$= 1{,}30{,}000(e^{30k})^2$$
$$= 1{,}30{,}000 \left(\frac{16}{13}\right)^2$$
$$\approx 1{,}97{,}600$$

2020 ஆம்ஆண்டின்மக்கள்தொகை= 1,97,600

5. நுண்ணுயிர்களின் பெருக்கத்தில் பாக்டீரியாவின் பெருக்க விகிதமானது அதில் காணப்படும் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. இப்பெருக்கத்தால் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கை 1 மணிநேரத்தில் மும்மடங்காகிறது எனில் 5 மணிநேரமுடிவில் பாக்டீரியாவின் ஆரம்பநிலையை காட்டிலும் மடங்கு 3^5 எனநிறுவுக.

தீர்வு:

t நேரத்தில் பாக்டீரியாவின் அளவு A என்க

$\frac{dA}{dt} \propto A$

$\frac{dA}{dt} = kA$

$\Longrightarrow A = Ce^{kt}$

$t = 0$ எனில் $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0$

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{Ce}^0$$
$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{C}$$

$A = \mathrm{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{kt}}$

$t = 1$ எனில் $\mathrm{A} = 3\mathrm{A}_0$

$3\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_0\mathrm{e}^{\mathrm{k}}$

$$3 = \mathrm{e}^{\mathrm{k}}$$

$t = 5$ எனில் A =?

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_0\mathrm{e}^{5\mathrm{k}}$$

$$= A_0(e^k)^5$$
$$= A_0 3^5$$

∴5 மணிநேரமுடிவில் பாக்டீரியாவின் எண்ணிக்கை ஆரம்பநிலையை போல் 3^5 மடங்கு

6. ஒரு நோயாளியின் சிறுநீரிலிருந்து வேதிப்பொருள் வெளியேறும் அளவினை தொடர்ச்சியாக கேத்தேடர் என்ற கருவியின் மூலம் கண்காணிக்கப்படுகிறது. t=0 என்ற நேரத்தில் நோயாளிக்கு 10 மி.கிராம் வேதிப்பொருள். கொடுக்கப்படுகிறது இது $-3t^{\frac{1}{2}}$ மி.கிராம்/மணி என்னும் வீதத்தில் வெளியேறுகிறது எனில்
   (i) நேரம் t>0 எனும் போது நோயாளியின் உடலிலுள்ள வேதிப்பொருளின் அளவைக் காணும் பொதுச் சமன்பாடு என்ன?
   (ii) முழுமையாக வேதிப்பொருள் வெளியேற எடுத்துக் கொள்ளும் குறைந்தபட்ச கால அளவு என்ன?

தீர்வு:

(i) t எனும் நேரத்தில் வேதிப்பொருளின் எடை A என்க. வேதிப்பொருளின் வெளியேரும் வீதம் $= -3t^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dA}{dt} = -3t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -3t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$\int dA = \int -3t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$A = -3\ \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -2t^{\frac{3}{2}} + c$$

t=0 எனில் $A = 10 \Rightarrow c = 10$

(ii) A = 0 எனில் வேதிப்பொருள் முழுமையாக வெளியேறிவிட்டது எனப் பொருள்

$$0 = 10 - 2t^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 10 = 2t^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 5 = t^{\frac{3}{2}}$$
$$t^3 = 5^2 = 25 \Rightarrow 2.9$$

முழுமையாக வேதிப்பொருள் வெளியேற எடுத்துக் கொள்ளும் குறைந்தபட்ச கால அளவு 2.9 மணி.

7. 1 ரேடியம் சிதையும் மாறுவீதமானது அதில் காணப்படும் அளவிற்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. 50 வருடங்களில் ஆரம்ப அளவிலிருந்து 5 சதவீதம் சிதைந்திருக்கிறது எனில் 100 வருட முடிவில் மீதியிருக்கும் அளவு என்ன? (A_0ஐ ஆரம்ப அளவு எனக் கொள்க)

தீர்வு:

tநேரத்தில் ரேடியம் எண்ணிக்கை A என்க

$$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA$$
$$A = ce^{kt}$$
$$t = 0, A = A_0$$
$$A_0 = c$$
$$A = A_0 e^{kt}$$

$t = 50$ எனில் $A = 0.95A_0$
$\therefore 0.95A_0 = A_0 e^{50k} \Rightarrow e^{50k} = 0.95$
$t = 100$எனில் $A = A_0 e^{100k} \Rightarrow A = A_0(e^{50k})^2 = (0.95)^2$
$A = 0.9025A_0$
100 வருட முடிவில் மீதியிருக்கும் அளவு $0.9025A_0$

8. ஒரு இரசாயன விளைவில் ஒரு பொருள் மாற்றம் அடையும் மாறு வீதமானது நேரத்தில் மாற்றமடையாத அப்பொருளின் அளவிற்கு விகிதமாக உள்ளது ஒரு மணி முடிவில் 60 கிராமும் மற்றும் 4 மணி நேர முடிவில் 21 கிராமும் மீதி இருந்தால் ஆரம்ப நிலையில் அப்பொருளின் எடையினைக் காண்க.

தீர்வு:

tநேரத்தில் ரேடியம் அப்பொருளின் எடை A என்க.
$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow A = ce^{kt}$
$t = 1, A = 60 \Rightarrow ce^{k} = 60$ (1)
$t = 4, A = 21 \Rightarrow ce^{4k} = 21$ (2)
$(1)^4 \Rightarrow C^4 e^{4k} = 60^4$ (3)
$\frac{(3)}{(2)} = \frac{C^4 e^{4k}}{ce^{4k}} = \frac{60^4}{21}$
$c^3 = \frac{60^4}{21} \Rightarrow c = 85.15gms(app).$
$t = 0$எனில் $A = C = 85.15$ gms(app)
ஆரம்ப நிலையில் அப்பொருளின் எடை 85.15 gms(app)

.

9. ஒரு வங்கியானது தொடர் கூட்டு வட்டி முறையில் வட்டியை கணக்கிடுகிறது அதாவது வட்டி வீதத்தை அந்தந்த அசலின் மாறு வீதத்தில் கணக்கிடுகிறது ஒருவரது வங்கி இருப்பில் தொடர்சியான கூட்டு வட்டி மூலம் ஆண்டு ஒன்றிற்க்கு 4 சதவீதமாக இருப்பின் அத்தொகை எத்தனை ஆண்டுகளில் ஆரம்பத் தொகையைப் போல் இரு மடங்காகும். [$e^{0.08} = 1.0833$எடுத்து கொள்க]

தீர்வு:

tநேரத்தில் அசல் A என்க.
$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow A = ce^{kt}$
$\therefore A(t) = ce^{0.08t}$இங்கு $k = 0.08$
$A(t) = ce^{0.08t}$
ஒரு வருட அதிகரிப்பு சதவீகிதம்
$\frac{A(1) - A(0)}{A(0)} \times 100 \Rightarrow \left(\frac{A(1)}{(A(0)} - 1\right) \times 100$
$\left(\frac{ce^{0.08}}{c} - 1\right) \times 100$
$(e^{0.08} - 1) \times 100 = (1.0833 - 1) \times 100 = 0.0833 \times 100$
$= 8.33\%$
எனவே ஒரு ஆண்டில் அதிகரிக்கும் சதவீதம் $= 8.3.3\%$

10. ரூ. 1000 என்ற தொகைக்கு தொடர்ச்சி கூட்டு வட்டி வீதம் ஆண்டு ஒன்றிற்கு 4 சதவிகிதமாக இருப்பின் அத்தொகை எத்தனை ஆண்டுகளில் ஆரம்பத் தொகையைப் போல் இரு மடங்காகும். [$\log_e 2 = 0.6931$].

தீர்வு:

tநேரத்தில் அசல் A என்க.

$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow A = ce^{kt}$

$A = ce^{0.04t}, where\ k = 0.04$

$A = 1000e^{0.04t}$

$e^{0.04t} = 2$

$0.04t = \log 2$

$t = \frac{\log 2}{0.04} = \frac{0.6931}{0.04}$

$= \frac{69.31}{0.04} = 17.3275$

$t = 17\ Years\ (App.)$

11. வெப்ப நிலை $15℃$ உள்ள ஒரு அறையில் வைக்கப்பட்டுள்ள தேநீரின் வெப்பநிலை $100℃$ ஆகும், அது 5 நிமிடங்களில் $60℃$ ஆக குறைந்துவிடுகிறது. மேலும் 5 நிமிடம் கழித்து தேநீரின் வெப்ப நிலைக் காண்க.

தீர்வு:

t என்ற நேரத்தில் வெப்ப நிலையினை T என்க, நியூட்டனின் குளிர்ச்சி விதிப்படி

$\frac{dT}{dt} \propto (T - 15) Since\ C = 15℃$

$\frac{dT}{dt} = k(T - 15) \Rightarrow T - 15 = ce^{kt}$

$t = 0, T = 100 \Rightarrow 100 - 15 = ce^{0} \Rightarrow C = 85$

$\therefore T - 15 = 85e^{kt}$

$t = 5,\ T = 60 \Rightarrow 60 - 15 = 85e^{kt} \Rightarrow 45 = 85e^{5k}$

$e^{5k} = \frac{45}{85}$

$t = 10,\ T - 15 = 85e^{10t}$

$T = 15 + 85(e^{5t})^2$

$T = 15 + 85\left(\frac{45}{85}\right)^2$

$T = 38.82℃$

மேலும் 5 நிமிடம் கழித்து தேநீரின் வெப்ப நிலை $38.82℃$

12. ஒரு இறந்தவர் உடலை மருத்துவர் பரிசோதிக்கும் போது இறந்த நேரத்தை தோராயமாக கணக்கிட வேண்டியுள்ளது. இறந்தவரின் உடலின் வெப்ப நிலை காலை 10:00 மணி அளவில் $93.4°F$ என குறித்துக் கொள்கிறார் மேலும் 2 மணி நேரம் கழித்து வெப்ப நிலை அளவு (நிலையானது) $72°F$ எனில் இறந்த நேரத்தினை கணக்கிடுக (ஒரு மனித உடலின் சாதரண வெப்ப நிலை $98.6°F$ எனக் கொள்க).

$\left[\log\left(\frac{19.4}{21.4}\right) = -0.426 \times 2.303\ and\ \ \log\left(\frac{26.6}{21.4}\right) = 0.0925 \times 2.303\right]$

தீர்வு:

t என்ற நேரத்தில் வெப்ப நிலையினை T என்க, நியூட்டனின் குளிர்ச்சி விதிப்படி

$\frac{dT}{dt} \propto (T - 72) Since\ C = 72℃$

$\frac{dT}{dt} = k(T - 72) \Rightarrow T - 72 = ce^{kt}$

$t = 0,\ T = 93.4 \Rightarrow 93.4 - 72 = ce^0 \Rightarrow C = 21.4$

$\therefore T - 72 = 21.4e^{kt}$

$t = 120,\ T = 91.4 \Rightarrow 91.4 - 72 = 21.4e^{120k} \Rightarrow 19.4 = 21.4e^{120k}$

$e^{120k} = \frac{19.4}{21.4} \Rightarrow k = \frac{1}{120}\log_e \frac{19.4}{21.4}$

$\Rightarrow k = \frac{1}{120}(-0.0426 \times 2.303) t_1$ என்பது இறந்த நேரதிற்கு பின் காலை 10 மணிக்கு உள்ளான நேரம் என்க.

$t = t_1,\ T = 98.6 \Rightarrow 98.6 - 72 = 21.4e^{kt_1} = 26.6$

$kt_1 = \log \frac{26.26}{21.4}$

$t_1 = \frac{1}{k}\log_e \frac{26.6}{21.4} = \frac{0.0925 \times 2.303}{-0.0426 \times 2.303} \times 120$

$-266\ min = -4\ hr\ 26\ min$

அது முதல் அளவீடான காலை 10 மணிக்கு முன்னதாக 4 மணி 26 நிமிடம் இறந்த நேரம் தோராயமாக 10.00 மணி 4 மணி 26 நிமிடம்(அ.து) இறந்த நேரம் தோராயமாக 5.34 மணி.

13. ஒரு கதிரியக்கப் பொருள் சிதையும் மாறுவீதமானது அதன் எடைக்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது அதன் எடை 10 மி.கிராம் ஆக இருக்கும்போது சிதையும் மாறுவீதம் நாளொன்றுக்கு 0.051 மி.கிராம் எனில் அதன் எடை 10 கிராமிலிருந்து 5 கிராமாகக் குறைய எடுத்துக்கொள்ளும் கால அளவைக் காண்க($\log_e 2 = 0.6931$).

தீர்வு:

tநேரத்தில் அப்பொருளின் எடை A என்க.

$\frac{dA}{dt} \propto A \Rightarrow \frac{dA}{dt} = kA \Rightarrow A = ce^{kt}$

$t = 0$ எனில் $A = 10 \Rightarrow ce^0 \Rightarrow C = 10$

$A = 10e^{kt}$

$\frac{dA}{dt} = kA$

$A = 10$எனில் $\frac{dA}{dt} = -0.051$

$\Rightarrow -0.051 = 10k \Rightarrow k = -0.0051$

$A = 5$ எனில் $5 = 10e^{-0.0051t} \Rightarrow e^{-0.0051t} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow e^{0.0051t} = 2 \Rightarrow 0.0051t = \log 2$

$t = \frac{\log 2}{0.0051} = \frac{0.06931}{0.0051} \approx 136$ நாட்கள்

14. தீர்க்க: $dx + xdy = e^{-y}\sec^2 y\ dy$

தீர்வு:

$dx + xdy = e^{-y}\sec^2 y\ dy$

இதுx-இல் நேரியச் சமன்பாடு

$P = 1, Q = e^{-y}\sec^2 y$

$I.F = e^{\int Pds} = e^{\int dy} = e^y$

தேவையான தீர்வு

$x(I.F) = \int Q(I.F)dx + c$

$xe^y = \int e^y e^{-y}\sec^2 y\, dy$

$xe^y = \int \sec^2 y\, dy$

$xe^y = \tan y + c$

9. தனிநிலைகணக்கியல்

6 - மதிப்பெண்வினாக்கள்

1. குலத்தின்நீக்கல்விதிகளைஎழுதுக

G ஒருகுலம்என்க . $a, b, c \in G$

$(i) a * b = a * c \Rightarrow b = c$ (இடதுநீக்கல்விதி)

$(ii) b * a = c * a \Rightarrow b = c$ (வலதுநீக்கல்விதி)

நிரூபணம்: $(i) a * b = a * c \quad \Rightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$

$\Rightarrow (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$

$\Rightarrow e * b = e * c$

$\Rightarrow b = c$

$(ii) b * a = c * a \ \Rightarrow (b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1}$

$\Rightarrow b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1})$

$\Rightarrow b * e = c * e$

$\Rightarrow b = c$

2. பின்திருப்புகைவிதியைஎழுதிநிறுவுக

(அல்லது)

G ஒருகுலம்என்க . $a, b \in G$

$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$என்பதைநிரூபி

நிரூபணம்: $b^{-1} * a^{-1}$ஆனது$a * b$இன்எதிர்மறைஎனக்காட்டினால்போதுமானது

$(i)(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e$

$(ii)(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e$எனநிரூபிக்கவேண்டும்

$(i)(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) \quad = a * (b * b^{-1}) * a^{-1}$

$= a * e * a^{-1}$

$= a * a^{-1}$

$= e$

$(ii)(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) \ = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b$

$= b^{-1} * e * b$

$= b^{-1} * b \ = e$

$\therefore a * b$இன்எதிர்மறை$b^{-1} * a^{-1}$

$(i.e)(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

∧க்கு ஒரு F இருந்தாலும் F வரவேண்டும்.

∨க்கு ஒரு T இருந்தாலும் T வரவேண்டும்.

$p \rightarrow q$க்கு T F க்கு F ……….. மற்றதற்கு T

$p \leftrightarrow q$ க்கு T T க்கு T மேலும் F F க்கு T ……………. மற்றதற்கு F

எடுத்துக்காட்டு (1) (p∨q)∧(~q) எனும் கூற்றுக்கு மெய் அட்டவணை அமைக்க.

P	q	$(p \vee p)$	$\sim q$	$(p \vee p) \wedge (\sim p)$
T	T	T	F	F
T	F	T	T	T
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

(2) ~ [(~ p)∧(~q)]எனும் கூற்றுக்கு மெய் அட்டவணை அமைக்க.

P	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\sim [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	F

(3) (p∧q)∨(~ r) எனும் கூற்றுக்கு மெய் அட்டவணை அமைக்க.

P	q	r	$(p \wedge q)$	$\sim r$	$(p \wedge q) \vee (\sim r)$
T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T

(4) $(p \vee q) \wedge r$ எனும் கூற்றுக்கு மெய் அட்டவணை அமைக்க.

P	Q	r	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

(5) $(p \wedge q) \vee [\sim (p \wedge q)]$ எனும் கூற்றுக்கு மெய் அட்டவணை அமைக்க.

P	q	$(p \wedge q)$	$\sim (p \wedge q)$	$(p \wedge q) \vee [\sim (p \wedge q)]$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T

(6) $(p \vee q) \vee r$ எனும் கூற்றுக்கு மெய் அட்டவணை அமைக்க.

p	q	r	$(p \vee q)$	$(p \vee q) \vee r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

7. $(p \wedge q) \vee r$ எனும் கூற்றுக்கு மெய் அட்டவணை அமைக்க.

P	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \vee R$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

8. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$ எனக் காட்டுக.

P	q	$(p \vee q)$	$\sim (p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F

P	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

$\sim (p \vee p) \cong (\sim p) \wedge (\sim q)$

9. (i) $[(\sim p) \vee (\sim q)] \vee p$ எனும் கூற்று ஒரு மெய்மை எனக் காட்டுக.

P	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$[(\sim p) \vee (\sim q)] \vee P$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

இது மெய்மை அட்டவணை.

10. $[(\sim q) \wedge p] \wedge q$ எனும் கூற்று ஒரு முரண்பாடு எனக் காட்டுக.

P	q	$\sim q$	$[(\sim q) \wedge p]$	$[(\sim q) \wedge p] \wedge q$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F

இதுமுரண்பாடு அட்டவணை

11: $[(\sim p) \vee q] \vee [p \wedge (\sim q)]$ எனும் கூற்று ஒரு மெய்மையா என்பதனை மெய் அட்டவணையைக் கொண்டு தீர்மானிக்க.

P	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee q$	$P \wedge (\sim q)$	$[(\sim p) \vee q] \vee [P \wedge (\sim q)]$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T

இது மெய்மை அட்டவணை.

12. **$[(\sim p) \wedge q\,] \wedge p$** எனும் கூற்று ஒரு மெய்மையா அல்லது முரண்பாடா என்பதனை மெய் அட்டவணையைக் கொண்டு தீர்மானிக்க.

P	q	$\sim p$	$[(\sim p) \wedge p]$	$[(\sim p) \wedge p] \wedge P$
T	T	F	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

இது முரண்பாடான அட்டவணை

13. **$(p \vee q) \vee [\sim (p \vee q)\,]$** எனும் கூற்று ஒரு மெய்மையா அல்லது முரண்பாடா என்பதனை மெய் அட்டவணையைக் கொண்டு தீர்மானிக்க.

P	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$[(p \vee q) \vee [\sim (p \vee q)]]$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	F	T	T

இது மெய்மை அட்டவணை.

14. **$[\,p \wedge (\sim q)\,] \vee [\,(\sim p) \vee q\,]$** எனும் கூற்று ஒரு மெய்மையா அல்லது முரண்பாடா என்பதனை மெய் அட்டவணையைக் கொண்டு தீர்மானிக்க.

P	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$(\sim p) \vee q$	$[p \wedge (\sim q)] \vee [(\sim p) \vee$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

இது மெய்மை அட்டவணை.

15) **$q \vee [p \vee (\sim q)]$** எனும் கூற்று ஒரு மெய்மையா அல்லது *முரண்பாடாஎன்பதனை மெய் அட்டவணையைக் கொண்டு தீர்மானிக்க.*

P	q	$\sim q$	$p \vee (\sim q)$	$q \vee [p \vee (\sim q)]$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T

இது மெய்மை அட்டவணை.

16) **$[\ p \wedge (\sim p)\ ] \wedge [\ (\sim q) \wedge p\ ]$** எனும் கூற்று ஒரு மெய்மையா அல்லது முரண்பாடா என்பதனை மெய் அட்டவணையைக் கொண்டு தீர்மானிக்க.

P	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge (\sim p)$	$(\sim q) \wedge p$	$[p \wedge (\sim p)] \wedge [(\sim q) \vee$
T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F

இது முரண்பாடான அட்டவணை

17. **$p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$** எனக் காட்டுக.

P	q	$P \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	q	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

$p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$

18. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ எனக் காட்டுக.

P	q	$P \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

P	q	$P \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(P \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

19. $p \leftrightarrow q \equiv [\ (\sim p) \vee q\ ] \wedge [\ (\sim q) \vee p\ ]$ எனக் காட்டுக.

P	q	$P \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

P	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p)\vee(q)$	$(\sim q)\vee p$	$[(\sim p)\vee(q)]\wedge[(\sim q)\vee p]$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T

$p\leftrightarrow q \equiv [(\sim p)\vee q]\wedge[(\sim q)\vee p]$

20. **$\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p)\vee(\sim q)$** எனக் காட்டுக.

P	q	$(p\wedge p)$	$\sim(p\wedge p)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

P	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p)\vee(\sim q)$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

$\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p)\vee(\sim q)$

21. **$p\rightarrow q$** மற்றும் **$q\rightarrow p$** சமானமற்றவை எனக் காட்டுக.

P	q	$P\rightarrow q$	$q\rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

ஏனவே **$p\rightarrow q$**யும் **$q\rightarrow p$** சமானமற்றவை

22. **$p \wedge q \rightarrow p \vee q$ என்பது ஒரு மெய்மை எனக் காட்டுக.**

P	q	$(p \wedge q)$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow p \vee q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

இது மெய்மை அட்டவணை

(21) 1இன் 3ஆம் படி மூலங்கள் (cube root of unity) ஒரு முடிவான எபீலியன் குலத்தை பெருக்கலின் கீழ் அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

***தீர்வு* :** $G = \{1, \omega, \omega^2\}$. கேய்லி அட்டவணையானது,

.	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

இந்த அட்டவணையிலிருந்து, நாம் பின்வருவனவற்றை அறிகிறோம்.

(i) அட்டவணையில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும், G-இன் உறுப்புகளாகும். எனவே அடைப்பு விதி உண்மையாகிறது.

(ii) பெருக்கல் எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதிக்குட்படும்.

(iii) சமனியுறுப்பு 1. அது சமனி விதியைப் பூர்த்தி செய்யும்.

(iv) 1-இன் எதிர்மறை 1

ω-இன் எதிர்மறை ω^2

ω^2-இன் எதிர்மறை ω

மற்றும் இது எதிர்மறை விதியைப் பூர்த்தி செய்யும்.

$\therefore (G, .)$ ஒரு குலமாகும்.

(v) பரிமாற்று விதியும் உண்மையாகும்.

$\therefore (G, .)$ ஒரு எபீலியன் குலமாகும்.

(vi) G ஒரு முடிவான கணம் ஆதலால், $(G, .)$ ஒரு முடிவான எபீலியன் குலமாகும்.

(22) 1-இன் 4-ஆம் படி மூலங்கள் (fourth roots of unity) பெருக்கலின் கீழ் எபீலியன் குலத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு : 1-இன் 4ஆம் படி மூலங்கள் $1, i, -1, -i$.

$G = \{1, i, -1, -i\}$. கேய்லி அட்டவணையானது

.	1	−1	i	$-i$
1	1	−1	i	$-i$
−1	−1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	−1	1
$-i$	$-i$	i	1	−1

இந்த அட்டவணையிலிருந்து, நாம் பின்வருவனவற்றை அறிகிறோம்.

(i) அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.

(ii) C-இல் பெருக்கலானது சேர்ப்பு விதிக்குட்படுமாதலால், G-யிலும் அது உண்மையாகும்.

(iii) சமனி உறுப்பு $1 \in G$ மற்றும் அது சமனி விதியைப் பூர்த்தி செய்கிறது.

(iv) 1-இன் எதிர்மறை 1 ; i-இன் எதிர்மறை $-i$; -1-இன் எதிர்மறை -1 ; மற்றும் $-i$-இன் எதிர்மறை i. எதிர்மறை விதியையும் பூர்த்தி ஆகிறது. $\therefore (G, .)$ ஒரு குலமாகும்.

(v) அட்டவணையிலிருந்து, பரிமாற்று விதியும் உண்மை என்பதை அறியலாம். $\therefore (G, .)$ ஒரு எபீலியன் குலமாகும்.

(23) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ ஆகிய நான்கு அணிகளும் அடங்கிய கணம் அணிப்பெருக்கலின் கீழ் ஒரு எபீலியன் குலத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$ என்க.

$G = \{I, A, B, C\}$ என்க.

இவ்வணிகளை இரண்டு இரண்டாகப் பெருக்கி பெருக்கல் அட்டவணையைப் பின்வருமாறு அமைக்கலாம் :

.	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	I	C	B
B	B	C	I	A
C	C	B	A	I

(i) ***அடைப்பு விதி :*** பெருக்கல் அட்டவணையின் எல்லா உறுப்புகளும், G-இன் உறுப்புகள். Gஆனது .இன் கீழ் அடைவு பெற்றுள்ளது. எனவே அடைப்பு விதி உண்மை.

(ii) ***சேர்ப்பு விதி :*** அணி பெருக்கல் பொதுவாக சேர்ப்பு விதிக்குட்படும்.

(iii) ***சமனி விதி :*** I-ஐ முன்வைத்து எழுதப்பட்டுள்ள நிரையின் உறுப்புகள் எல்லாவற்றிற்கும் மேலேயுள்ள நிரையுடனும் I-ஐ மேலே வைத்து எழுதப்பட்டுள்ள நிரலில் உள்ள உறுப்புகள் இடப்புற இறுதியில் அமைந்த நிரலுடன் ஒன்றி விடுதலால், I ஆனது சமனி உறுப்பாகும்.

(iv) $I . I = I \Rightarrow$ I-இன் எதிர்மறை I

$A . A = I \Rightarrow$ A-இன் எதிர்மறை A

$B . B = I \Rightarrow$ B-இன் எதிர்மறை B

$C . C = I \Rightarrow$ C-இன் எதிர்மறை C

அட்டவணையிலிருந்து . பரிமாற்று விதிக்குட்படுவது தெளிவு. எனவே G ஆனது அணிப்பெருக்கலின் கீழ் ஒரு எபீலியன் குலமாகும்.

10 மதிப்பெண்வினாக்கள்

1. 11-மட்டுகாணப்பெற்ற பெருக்கலின் கீழ்{[1], [3], [4], [5], [9]}என்ற கணம் எபிலியன் குலத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக

தீர்வு G={[1], [3], [4], [5], [9]}என்க

• 11	[1]	[3]	[4]	[5]	[9]
[1]	[1]	[3]	[4]	[5]	[9]
[3]	[3]	[9]	[1]	[4]	[5]
[4]	[4]	[1]	[5]	[9]	[3]
[5]	[5]	[4]	[9]	[3]	[1]
[9]	[9]	[5]	[3]	[1]	[4]

அடைப்புபண்பு: அட்டவணையில்உள்ளஉறுப்புகள்அனைத்தும்G-ன் உறுப்புகள் ஆகும். எனவே அடைப்புப் பண்பு நிறைவு செய்கிறது.

சேர்ப்புபண்பு: மட்டு 11 பெருக்கலைப்பொறுத்துசேர்ப்புவிதியைநிறைவுசெய்கிறது
சமனிஉறுப்பு :$e = [1]$
எதிர்மறைஉறுப்பு:

உறுப்பு:	[1]	[3]	[4]	[5]	[9]
எதிர்மறை:	[1]	[4]	[3]	[9]	[5]

பரிமாற்றுவிதி: அட்டவணையிலிருந்து பரிமாற்றுவிதி உண்மையாகிறது. எனவே G ஒரு எபிலியன் குலம் ஆகும்.

2. பூச்சியமற்ற கலப்பெண்களின் கணமான$c = \{0\}$இல் வரையறுக்கப்பட்ட$f_1(z) = z, f_2(z) = -z, f_3(z) = \frac{1}{z}, f_4(z) = -\frac{1}{z}$ $\forall z \in c - \{0\}$ என்ற சார்புகள்யாவும் அடங்கிய கணம் $\{f_1, f_2 f_3, f_4\}$ ஆனது சார்புகளின் சேர்ப்பின் கீழ் ஓர் எபிலியன் குலம் அமைக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு: $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

•	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

அடைப்புபண்பு:அட்டவணையில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் G - ன் உறுப்புகள் எனவே அடைப்புப் பண்பு நிறைவு செய்கிறது.

சேர்ப்புபண்பு: சார்புகளின் சேர்ப்பு எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதியை நிறைவு செய்யும்.

சமனிஉறுப்பு :$e = f_1 \in G$

எதிர்மறைஉறுப்பு:

உறுப்பு	f_1	f_2	f_3	f_4
எதிர்மறை	f_1	f_2	f_3	f_4

பரிமாற்றுவிதி: அட்டவணையிலிருந்து பரிமாற்றுவிதி உண்மையாகிறது.

$\therefore (G,*)$ஒருஎபிலியன்குலம்ஆகும்.

3. $(Z_7 - \{[0]\},\bullet_7)$ ஒரு குலம் எனக் காட்டுக

தீர்வு: $Z_7, -\{[0]\},\bullet_7 = \{[0]\} = \{[1],[2],[3],[4],[5],[6]\}$ என்க

$\bullet_7$	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[2]	[2]	[4]	[6]	[1]	[3]	[5]
[3]	[3]	[6]	[2]	[5]	[1]	[4]
[4]	[4]	[1]	[5]	[2]	[6]	[3]
[5]	[5]	[3]	[1]	[6]	[4]	[2]
[6]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

அடைப்பு விதி: அட்டவணையின் எல்லா உறுப்புகளும் G-இன் உறுப்புகளாகும். எனவே அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.
சேர்ப்பு விதி: 7-இன் மட்டுக்கான பெருக்கல் எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதிக்குட்படும். எனவே சேர்ப்பு விதி உண்மையாகும்
சமனி விதி: சமனியுறுப்பு $[1] \epsilon G$ அது சமனி விதியைப் பூர்த்தி செய்கிறது
எதிர்மறை விதி:

உறுப்பு	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
எதிர்மறை உறுப்பு	[1]	[4]	[5]	[2]	[3]	[6]

$\therefore G = (Z_7 - \{[0]\},\bullet_7)$குலம் ஆகும்.

4. | **5.**

$\left\{\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} i\, x \in R-\{0\}\right\}$ என்ற கணம் அணிப்பெருக்கலின் கீழ் குலமாகும் என் நிறுவுக		$\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} / a \in R-\{0\}\right\}$ என்ற கணம் அணிப்பெருக்கலின் கீழ் குலமாகும் என் நிறுவுக
$\left\{\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} i\, x \in R-\{0\}\right\}$ என்க		$\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} / a \in R-\{0\}\right\}$ என்க
அடைப்பு விதி	$A=\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} y & y \\ y & y \end{bmatrix} \in G$ என்க பின்னர் $x, y \in R-\{0\}$ $AB=\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y & y \\ y & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{bmatrix} \in G$ $\because x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow 2xy = 0$ $A, B \in G \Rightarrow AB \in G$ எனவே அடைப்பு விதி உண்மையாகும்	$A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in G$ என்க பின்னர் $a, b \in R-\{0\}$ $AB=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in G$ $\because a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ $A, B \in G \Rightarrow AB \in G$ எனவே அடைப்பு விதி உண்மையாகும்
சேர்ப்பு விதி	அணி பெருக்கல் எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதிக்குட்படும். எனவே சேர்ப்பு விதி பூர்த்தியாகிறது	அணி பெருக்கல் எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதிக்குட்படும். எனவே சேர்ப்பு விதி பூர்த்தியாகிறது
சமனி விதி	$A=\begin{bmatrix} e & e \\ e & e \end{bmatrix}$என்பது சமனி உறுப்பு என்க. சமனி உறுப்பின் வரையறைப்படி $AE = A = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$. அணி பெருக்கலின்படி $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2xe & 2xe \\ 2xe & 2xe \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \Rightarrow 2xe = x \Rightarrow e = \frac{1}{2} \in G \because x \neq 0$ சமனியுறுப்பு $E=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in G$. அது சமனி விதியை பூர்த்தி செய்யும்.	$A=\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$என்பது சமனி உறுப்பு என்க. சமனி உறுப்பின் வரையறைப்படி$AE = A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. அணி பெருக்கலின்படி $\Rightarrow \begin{bmatrix} ae & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow ae = a \Rightarrow e = 1 \in G \because a \neq 0$ சமனியுறுப்பு $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in G$. அது சமனி விதியை பூர்த்தி செய்யும்.
எதிர்மறை விதி	$B \in G$என்பது $A \in G$ இன் எதிர்மறை உறுப்பு என்க. எதிர்மறை உறுப்பின் வரையறைப்படி $AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ அணி பெருக்கலின்படி $AB = \begin{bmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{bmatrix}$ $\Rightarrow 2xy = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4x} \neq 0 \because x \neq 0$ $A=\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \in G$ இன் எதிர்மறை உறுப்பு $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{bmatrix}$எனவே எதிர்மறை விதி பூர்த்தியாகிறது.	$B \in G$என்பது $A \in G$ இன் எதிர்மறை உறுப்பு என்க. எதிர்மறை உறுப்பின் வரையறைப்படி $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ அணி பெருக்கலின்படி $AB = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} \neq 0 \because a \neq 0$ $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in G$ இன் எதிர்மறை உறுப்பு $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$எனவே எதிர்மறை விதி பூர்த்தியாகிறது.

6. $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\omega & 0\\0 & \omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^2 & 0\\0 & \omega\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & \omega^2\\\omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \omega\\\omega^2 & 0\end{pmatrix}\right\}$ என்ற கணம் அணிப்பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குலத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு: $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix}\omega & 0\\0 & \omega^2\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}\omega^2 & 0\\0 & \omega\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}0 & \omega^2\\\omega & 0\end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix}0 & \omega\\\omega^2 & 0\end{pmatrix}$ என்க.

$G = \{I, A, B, C, D, E\}$

•	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

அடைப்பு விதி: அட்டவணையின் எல்லா உறுப்புகளும் G-இன் உறுப்புகளாகும். எனவே அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.

சேர்ப்பு விதி:அணிப் பெருக்கல் எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதிக்குட்படும். எனவே சேர்ப்பு விதி உண்மையாகும்

சமனி விதி: சமனியுறுப்பு $I \epsilon G$ அது சமனி விதியைப் பூர்த்தி செய்கிறது. எனவே சமனி விதி உண்மையாகும்

எதிர்மறை விதி:

உறுப்பு	I	A	B	C	D	E
எதிர்மறை உறுப்பு	I	B	A	C	D	E

எனவே$(G,\bullet)$ ஒரு குலம்.

www.mathstimes.com

	$(Z,*)$ ஒரு முடிவுற்ற எபிலியன் மூலம் காட்டுக இங்கு $*$ ஆனது $a*b=a+b+2$ எனுமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது	Gஎன்பது மிகை விகிதமுறு எண் கணம் என்க.$a*b=\frac{ab}{3}$ எனுமாறு வரையறுக்கப்பட்ட செயலி $*$ இன் கீழ் G ஒரு குலத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக	-1ஐ தவிர மற்ற எல்லா விகிதமுறு எண்களும் உள்ளடக்கிய கணம் G ஆனது $a*b=a+b+ab$ எனுமாறு வரையறுக்கப்பட்ட செயலி $*$ இன் கீழ் எபிலியன் குலத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக	-1ஐ தவிர மற்ற எல்லா விகிதமுறு எண்களும் உள்ளடக்கிய கணம் G என்க. Gல் $*$ ஐ $a*b=a+b-ab,\forall a,b\in G$ எனுமாறு வரையறுக்கப்போம்.$(G,*)$ ஒரு முடிவுற்ற எபிலியன் குலத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக.
அடைப்பு விதி	a,bமற்றும் 2 முழு எண்கள். $\therefore$ $a*b\in Z$. அடைப்பு விதி உண்மை	$a,b\in G$ $a*b=\frac{ab}{3}\in G$ அடைப்பு விதி உண்மை	$G=Q-\{-1\}$என்க. $a,b\in G,a$ மற்றும் b விகிதமுறு எண்கள். $a\neq -1,b\neq -1$. $a*b=a+b+ab$ விகிதமுறு எண் ஆகும. $a*b\neq -1$ எனில் $a*b\in G$ அடைப்பு விதி உண்மை	$G=Q-\{1\}$என்க. $a,b\in G,$ a மற்றும் b விகிதமுறு எண்கள். $a\neq -1,b\neq -1$. $a*b=a+b-ab$ விகிதமுறு எண் ஆகும. $a*b\neq -1$ எனில் $a*b\in G$ அடைப்பு விதி உண்மை
சேர்ப்பு விதி	$a*(b*c)=(a*b)*c$ $a+b+c+4=a+b+c+4\in z$ சேர்ப்பு விதி உண்மையாகும்	$a*(b*c)=(a*b)*c$ $\frac{abc}{9}=\frac{abc}{9}\in G$ சேர்ப்பு விதி உண்மையாகும்	$a*(b*c)=(a*b)*c$ $a+b+c+bc+ab+ac+abc=a+b+c+ab+ac+abc$ சேர்ப்பு விதி உண்மையாகும்	$a*(b*c)=(a*b)*c$ $a+b+c-bc-ab-ac+abc=a+b+c-ab-ac+abc$ சேர்ப்பு விதி உண்மையாகும்
சமனி விதி	$e=-2\in Z$ சமனி விதி உண்மையாகும்	$e=3\in G$ சமனி விதி உண்மையாகும்	$e=0\in G$ சமனி விதி உண்மையாகும்	$e=0\in G$ சமனி விதி உண்மையாகும்
எதிர்மறை விதி	$a^{-1}=-a-4\in Z$ எதிர்மறை விதி உண்மையாகும்	$a^{-1}=\frac{9}{a}\in G$ எதிர்மறை விதி உண்மையாகும் $(G,*)$ ஒரு குலம்	$a^{-1}=\frac{-a}{1+a}\in G$ எதிர்மறை விதி உண்மையாகும்	$a^{-1}=\frac{-a}{a-1}\in G$ எதிர்மறை விதி உண்மையாகும்
பரிமாற்று விதி	$a*b=b*a$ $a+b+2=a+b+2$ $(Z,*)$ஒரு எபிலியன் குலமாகும்.		$a*b=b*a$ $a+b+ab=a+b+ab$ G ஒரு முடிவற்றதாதலால் $(G,*)$ முடிவற்ற எபிலியன் குலமாகும்	$a*b=b*a$ $a+b-ab=a+b-ab$ G ஒரு முடிவற்றதாதலால் $(G,*)$ முடிவற்ற எபிலியன் குலமாகும்

www.mathstimes.com